

Version ECP2

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les fiches indispensables en mathématiques

Julien Fernandez

Fonctions et Intégration

I. Premières fonctions usuelles

★ Fonctions affines :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.
 a est le coefficient directeur, b est l'ordonnée à l'origine.
- Dans un repère, la représentation graphique de f est la droite d'équation $y = ax + b$.



• **Signe de $ax + b$:**

$$\begin{aligned} \text{Si } a > 0, \quad ax + b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ax &\geq -b \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned} \text{Si } a < 0, \quad ax + b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ax &\geq -b \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

- Variations :
Si $a > 0$, f est croissante, si $a < 0$ f est décroissante.

★ Fonctions polynômes du second degré :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- cas où $c = 0$: $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$ (on a factorisé par x)
 0 et $-b/a$ sont racines « évidentes ».
Exemple : $x^2 + 2x = x(x + 2)$. 0 et -2 sont racines.
- cas où on reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Exemples : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. 3 et -3 sont racines.
 $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont racines.
 $3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$. $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ sont racines.
- cas où on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
Exemple : $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. -1 est la seule racine (double).



- Cas général : $\Delta = b^2 - 4ac$

	Résolution de l'équation	Factorisation de $ax^2 + bx + c$	Signe et représentation graphique	
			$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation.		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a				
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a				
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$		
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines				

II. Étude des variations d'une fonction & Dérivées

★ La technique la plus courante pour étudier les variations d'une fonction f est la suivante :

- On dérive la fonction $f(x)$.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On en déduit les variations de f .





★ Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



★ Dérivées et opérations :

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k \cdot v'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ où } v(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

★ Autres formules :

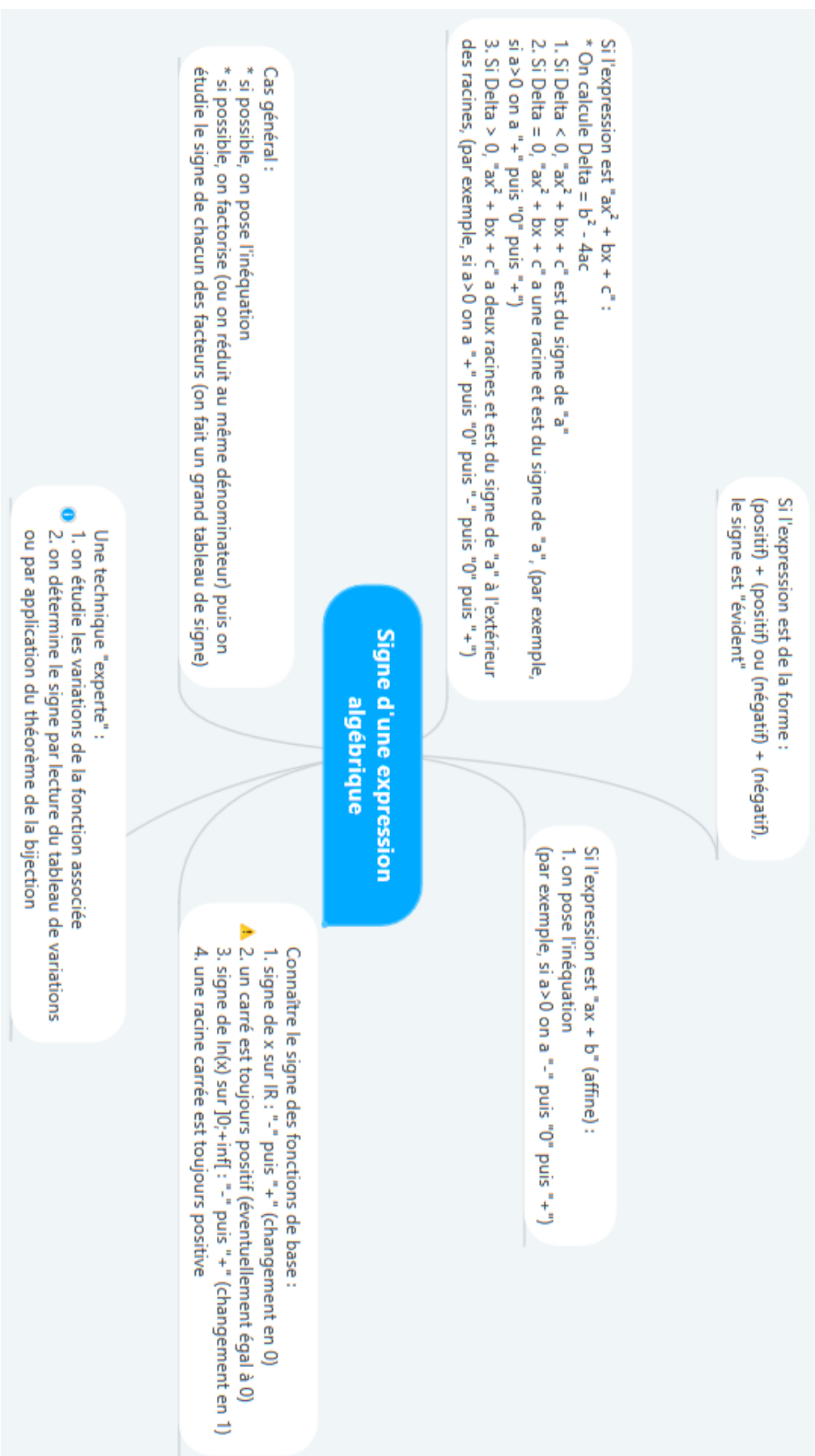
$$(u^2)' = 2u'u ; (u^3)' = 3u'u^2 ; (u^n)' = nu'u^{n-1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{k}{u^n}\right)' = -n \frac{k u'}{u^{n+1}}$$



★ Étude du signe d'une expression :



III. Limites



★ Limites usuelles

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



★ Opération sur les limites

- Somme :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

- Différence :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad (\text{on a utilisé : } f(x) = \frac{4}{x} + (-2x^2))$$

- Produit :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x \left(4 + \frac{2}{x} \right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{2}{x} = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

- Composée :

Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^3$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8 \end{array}$$



★ Limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini

On applique la règle du monôme de plus haut degré.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

★ Limites en une valeur interdite au dénominateur

- Sauf cas exceptionnel, la limite sera ∞ .
- On étudie le signe du dénominateur.
- On applique la règle des signes pour savoir si le résultat est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : déterminons $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1}$.

On détermine d'abord le signe du dénominateur :

$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, d'où

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$



★ Interprétations graphiques : asymptotes horizontales et verticales

- Si f a pour limite ℓ , en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est asymptote horizontale à la courbe de f .
- Si f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), en a^+ ou en a^- , on dit que la droite d'équation $x = a$, est asymptote verticale à la courbe de f .

★ Théorèmes sur les limites

f, g, h désignent des fonctions, l et l' deux réels, et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Compatibilité avec l'ordre

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle et soient

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l', \text{ alors } l \leq l'.$$

- **Théorème d'encadrement (ex "gendarmes")**

Si $g \leq f \leq h$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- Autres théorèmes de comparaison

- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (théorème de minoration).

- Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (théorème de majoration).

- **Théorème de la limite monotone :**

Si f est croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b .

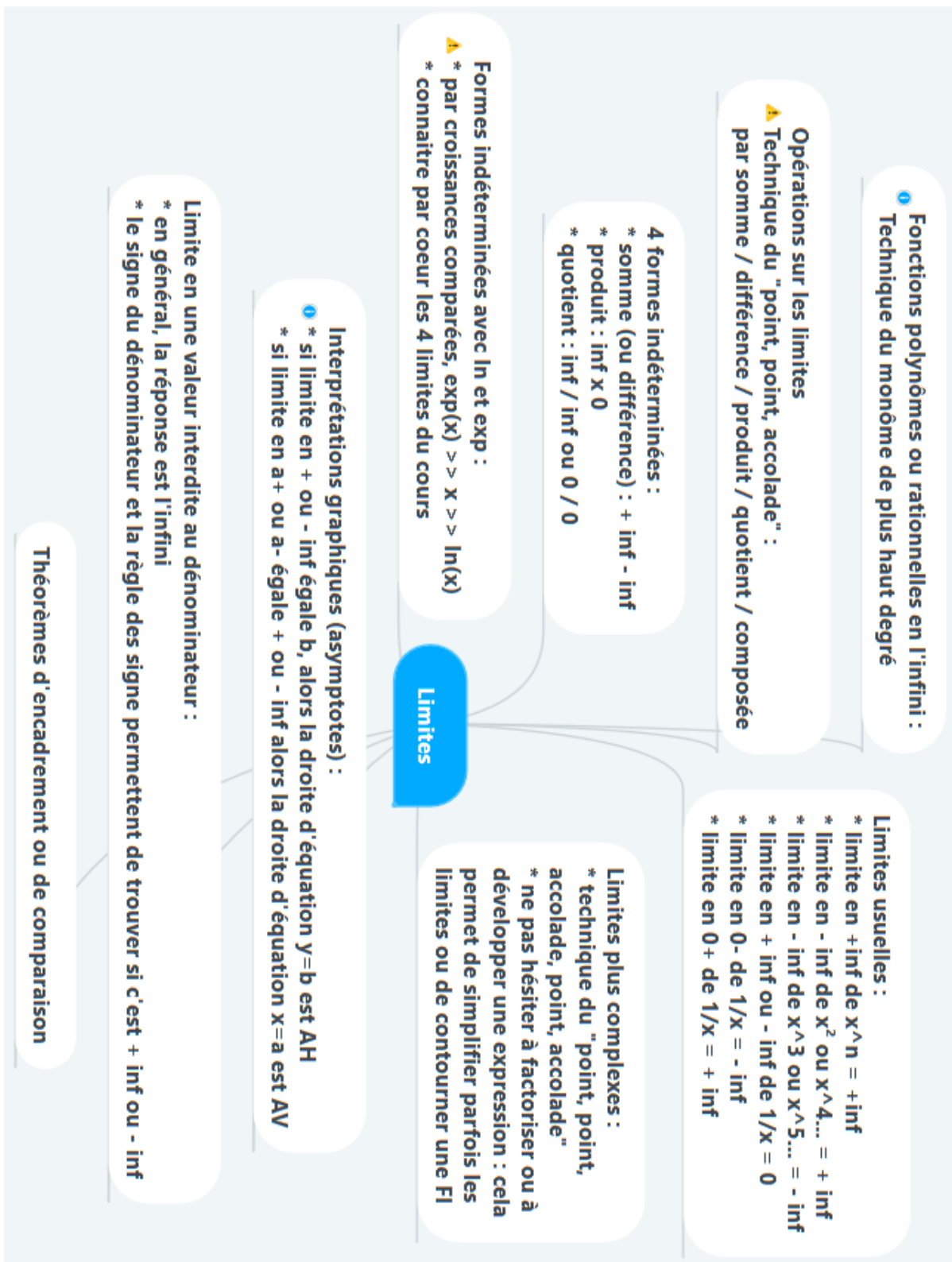
Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a .

Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors f admet pour limite $+\infty$ en b .

(cas analogues avec *non minorée* et/ou *décroissante*)



★ Synthèse :



IV. Questions « classiques »



★ Déterminer une équation de tangente

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- de sa dérivée $f'(x)$
- d'une abscisse a

Rédaction « type »

- On calcule $f(a)$.
- On calcule $f'(a)$.
- Une équation de la tangente (phrase de l'énoncé...) est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

★ Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$
- d'une droite d'équation $y = ax + b$

Rédaction « type »

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On montre que $\lim_{+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ selon le cas.



★ Étudier la position relative d'une courbe et d'une droite

On dispose :

- d'une fonction $f(x)$ dont la courbe C est donnée
- d'une droite D d'équation $y = ax + b$

Rédaction « type »

- On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- On détermine le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors C est au-dessus de D .
- Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors C est au-dessous de D .



★ Équation $g(x) = 0$... ou équation $g(x) = k$, k réel (théorème de la bijection).

On dispose :

- du tableau de variation complet de la fonction g

Rédaction « type »

- g est continue sur $]a, b[$ car dérivable sur $]a, b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a, b[$.
- $0 \in g(]a, b[) =]c, d[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur $]a, b[$.

Autre version :

- g est continue sur $]a, b[$ car dérivable sur $]a, b[$
- g est strictement croissante (ou décroissante) sur $]a, b[$.
- $0 \notin g(]a, b[) =]c, d[$

L'équation $g(x) = 0$ ne possède donc pas de solution sur $]a, b[$.

Remarque : bijection

Soit $f : \begin{cases} [a, b] \rightarrow [c, d] \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante),

alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[c, d]$.

★ Montrer que $\alpha \in [m, M]$

On dispose :

- du fait que α est solution unique de l'équation $g(x) = 0$
- de la stricte monotonie de g

Rédaction « type » (cas où g est strictement croissante)

- $g(m) = \dots < 0$
- $g(\alpha) = 0$ par construction
- $g(M) = \dots > 0$

Donc $g(m) < g(\alpha) < g(M)$.

Or, g est strictement croissante sur $[m, M]$.

On en déduit que $m < \alpha < M$.

★ Parité

- Une fonction f , définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est paire lorsque :
 - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
 - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$
- Une fonction f , définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, est impaire lorsque :
 - si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$
 - pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

★ Interprétations graphiques de limites C_f est la courbe de f .

- Si $\lim_{a \text{ ou } a^- \text{ ou } a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} f(x) = b$, C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, C_f admet une asympt. oblique d'équation $y = ax + b$.
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt. horizontale (Ox) .
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ ou } -\infty$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt. vert. (Oy) .
- Si $\lim_{+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, C_f admet une branche parab. de dir. asympt d'équation $y = ax$.

★ Convexité

• **Convexité et tangente :**

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est convexe (resp. concave) sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus (resp. au dessous) de chacune de ses tangentes.

Exemples : la fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine et la fonction logarithme népérien sont concaves sur $]0, +\infty[$.

• **Convexité et cordes :**

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est convexe (resp. concave) sur I si la courbe est au-dessous (resp. au dessus) des cordes.

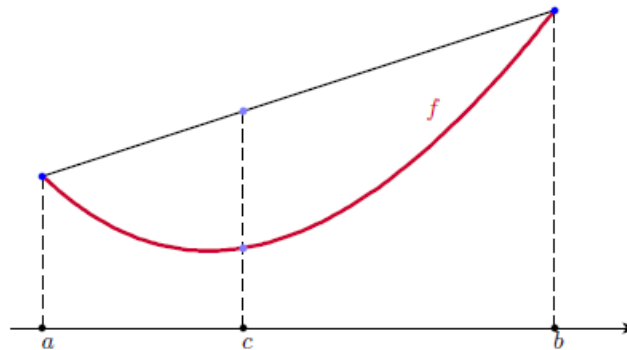


FIGURE 1 – Définition visuelle

• **Convexité et dérivée seconde :**

f est une fonction définie sur $]a, b[$, si la dérivée seconde f'' existe sur $]a, b[$ alors :

- si, pour tout réel x de $]a, b[$, $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur $]a, b[$.
- si, pour tout réel x de $]a, b[$, $f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur $]a, b[$.

★ Point d'inflexion

- Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- Tout point où la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe est un point d'inflexion.

V. Fonctions logarithme et exponentielle



★ Fonction logarithme

- La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note $\ln$.
- Conséquences immédiates :
 - ✓ $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.
 - ✓ $\ln 1 = 0$
 - ✓ $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

• Formules

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln a^n = n \ln a$$

• Variations et signe

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x de $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$. Pour tout x de $]0; 1[$, $\ln x < 0$.

• Limites

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale d'équation $x = 0$).

Exemple 1 : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) = +\infty \quad (\text{on a utilisé : } x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x))$$

Exemple 2 : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$.

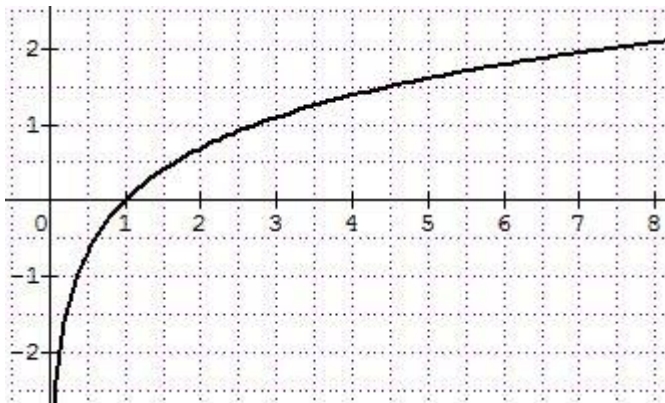
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad (\text{on a utilisé : } \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x)$$

- **Croissances comparées**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: à l'infini, toute puissance de x l'emporte sur $\ln$.

Exemple 3 : déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$
- par croissances comparées,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = +\infty$ (on a utilisé : $x^2 - \ln x = x^2 + (-\ln x)$)





★ Fonction exponentielle

- La fonction $\ln$ est strictement croissante de $]0 ; +\infty[$ sur $] -\infty ; +\infty[$. Alors pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; +\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[: e^x$.

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la fonction réciproque de $\ln$.

- Quelques conséquences immédiates :

- ✓ $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- ✓ $e^0 = 1 ; e^1 = e$.
- ✓ Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- ✓ Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln x} = x$.

$$\bullet \quad (e^x)' = e^x \qquad (e^{-x})' = -e^{-x} \qquad (e^{ax})' = a e^{ax} \qquad (e^u)' = u' e^u.$$

- Formules**

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{an}$$

- Variations et signe**

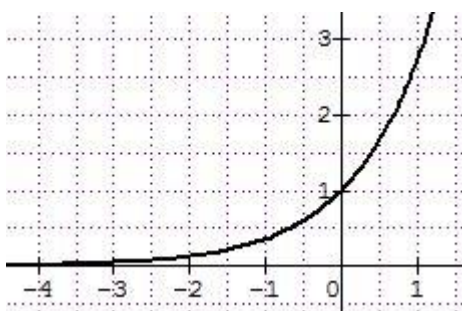
$\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $e^x > 0$.

- Limites**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$)

- Croissances comparées**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$: à l'infini, $\exp$ l'emporte sur toute puissance de x .



VI. Primitives des fonctions usuelles

★ Primitive de f sur I :

- ✓ Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . F est une primitive de f sur I , si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f . $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
- ✓ Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur I .
- ✓ Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I , alors :
 - les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \rightarrow F(x) + k, k \in \mathbb{R}$;
 - il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur y_0 en x_0 .



★ Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Une primitive	Intervalle
$x \mapsto k$ $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $] -\infty ; 0 [$ ou $] 0 ; +\infty [$ si $n < -1$
$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

★ Autres formules de primitive :

Fonction	Une primitive
$u' u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ u ne s'annule pas sur I lorsque $n < 0$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ u strictement positive sur I	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ u strictement positive sur I	$\ln u$
$u' e^u$	e^u

VII. Intégrales



★ Intégrale et primitive :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ est une primitive quelconque de } f \text{ sur } I.$$

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$.

Exemple 1 : calculer $I = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x - 1) dx$.

$$I = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1 \right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3+4+6-12}{12} = \frac{1}{12}.$$

Exemple 2 : calculer $J = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$.

$$J = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{2} + \ln 2 \right) - \left(-\frac{1}{2 \times 1^2} - \frac{1}{1} + \ln 1 \right).$$

$$J = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8} + \ln 2.$$

★ Propriétés de l'intégrale



• Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



• Linéarité

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad ; \quad \int_a^b (k f)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

• Positivité

Si f est positive sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

On peut en déduire le signe d'une intégrale selon le signe de f et le sens de a et b .

• Conservation de l'ordre

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $[0, 6]$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 f(x) dx$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 x dx + \int_2^3 -x dx + \int_3^6 0 dx,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2} \right]_2^3 + 0,$$

$$\int_0^6 f(x) dx = \left(\frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \right) + \left(-\frac{3^2}{2} \right) - \left(-\frac{2^2}{2} \right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

★ Intégrale et aire

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le réel $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



★ Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que u' et v' sont continues sur I . On a : $\int u v' = [u v] - \int u' v$.

Exemple : calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$

Rédaction « type »

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et dérivables sur $[0,1]$.

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.$$

On intègre par parties :

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = (-e^{-1}) - (0) - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

★ Fonction définie par une intégrale

Soient g une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I .

La fonction f définie sur I par $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ est l'unique primitive de g sur I qui s'annule en a . Autrement dit, f est une fonction dérivable sur I et $f'(x) = g(x)$.

Exemple : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

VIII. Représentation graphique

★ Conseils :

Pour représenter graphiquement une fonction :

- on travaille proprement au crayon gris dans un repère (O, I, J) (trois points suffisent),
- on porte toutes les informations remarquables évoquées par l'énoncé (extremum, c'est-à-dire minimum ou maximum, tangente, asymptotes, ...)
- on construit point par point avec abscisses x et ordonnées $f(x)$ (pour construire une droite, deux points suffisent) à l'aide, si besoin, des valeurs remarquables ci-dessous.



★ Valeurs remarquables :

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \quad \ln(2) \approx 0,7 \quad e \approx 2,7 \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,4$$

Suites

I. Suites arithmétiques

- ★ (u_n) est une suite arithmétique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1} - u_n = a$ où a est une constante réelle.



- ★ Si (u_n) est une suite arithmétique de raison a , alors :

$$u_n = u_0 + n \times a$$

ou bien

$$u_n = u_1 + (n-1) \times a$$

- ★ Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on part de $u_{n+1} - u_n$.
Le résultat doit être une constante.



- ★ Une somme particulière :

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

II. Suites géométriques

- ★ (v_n) est une suite géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $v_{n+1} = b \times v_n$ où b est une constante réelle.



- ★ Si (v_n) est une suite géométrique, alors :

$$v_n = v_0 \times b^n$$

ou bien

$$v_n = v_1 \times b^{n-1}$$

- ★ Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de v_{n+1} .
Le résultat doit être $b \times v_n$.



- ★ Limite et suite géométrique :

$$\text{si } |q| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad ; \quad \text{si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$



- ★ Une somme particulière :

$$1 + b + \dots + b^n = \sum_{k=0}^{k=n} b^k = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$$



III. Suites arithmético-géométriques

- ★ (u_n) est une suite arithmético-géométrique si, pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ selon si on démarre à $n=0$ ou à $n=1$), $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des constantes réelles.
- ★ Pour déterminer le terme d'une suite arithmético-géométrique :
 - On détermine le réel l tel que $l = al + b$.
 - On pose $v_n = u_n - l$. On montre que (v_n) est une suite géométrique.
 - On détermine l'expression de v_n ($v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_1 \times q^{n-1}$) puis on en déduit l'expression de u_n ($u_n = v_n + l$).
- ★ On peut également parfois en déduire la limite de u_n .



IV. Démonstration par récurrence

Exemple 1 : (cas d'une relation de récurrence)

On considère une suite de matrices de matrice initiale X_0 définie par $X_{n+1} = AX_n$.

Démontrer que $X_n = A^n X_0$.

Rédaction « type »

- $A^0 X_0 = I \times X_0 = X_0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $X_n = A^n X_0$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 : (cas d'une inégalité)

Données : g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{-x}$.

On sait que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

Rédaction « type »

- $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq 2$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow g(1) \leq g(u_n) \leq g(2) \text{ car } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$
Or, $g(1) = 2 - e^{-1} \approx 2 - 0,37 \geq 1$, $g(2) = 2 - e^{-2} \leq 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
On en déduit que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Suites croissantes, majorées, minorées, bornées

★ Une suite (u_n) est croissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.



★ Pour déterminer les variations d'une suite (u_n) , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, (u_n) est croissante et si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, (u_n) est décroissante.

★ Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) est bornée s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$,
 $m \leq u_n \leq M$.

VI. Théorèmes de convergence

★ Théorème de minoration :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

★ Théorème de majoration :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



★ Théorème d'encadrement (des gendarmes) :

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.



★ Suites monotones et convergences – théorème de convergence monotone :

Toute suite croissante et majorée est convergente (on ne connaît pas, à ce stade, la limite).

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

★ Soit une suite u définie par u_0 et, pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si f est continue sur I et si u est convergente, alors : $l = f(l)$ (point fixe).

Matrices

I. Calculs matriciels

★ Addition de matrices :

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 3+5 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

★ Multiplication d'une matrice par un réel :

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; $-3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$

★ Multiplication de matrices :

Exemple :

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 & 1 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 3 \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times (-1) + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 26 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attention, en général, $A \times B \neq B \times A$.

★ Matrices particulières :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices *Identité*. $A \times I = I \times A = A$.

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et O_3 sont des matrices nulles. $A \times O = O \times A = O$.

II. Inverse d'une matrice

- ★ On dit que deux matrices A et B sont inverses l'une de l'autre, ou que B est l'inverse de A si $A \times B = I$. On note alors $B = A^{-1}$.



- ★ Cas des matrices 2×2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.



- ★ Cas où la réponse est donnée... ou presque :

Soient deux matrices P et Q telles que $P \times Q = kI$. Alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{k}Q$.

Exemple 1 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. Conclure.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc A est inversible $A^{-1} = B$.

Exemple 2 : On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $C \times D$. Conclure.

$$C \times D = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-2) & 1 \times 2 + (-2) \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times (-2) & 2 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I.$$

Donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{5}D$.

Ces exemples se généralisent bien sûr à des matrices 3×3 ...

Exemple 3 : On considère une matrice N telle que $N^3 = O$ et la matrice $T = I + N$.

1. Calculer $(I + N)(I - N + N^2)$.

2. En déduire que T est inversible et déterminer T^{-1} .

Correction : 1. $(I + N)(I - N + N^2) = I - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I + N^3 = I$.

2. On en déduit que T est inversible et que $T^{-1} = I - N + N^2$.



★ **Matrice inverse et polynôme annulateur :**

Exemple :

Soit une matrice A donnée. On suppose qu'on a prouvé que $A^2 - A - 2I = 0$.

En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

$$A^2 - A - 2I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I \text{ (on reconnaît la propriété du paragraphe précédent)}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{A - I}{2}$ (qu'il reste à calculer).

★ **Matrice inverse par résolution de système**

Exemple : calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On résout le système : $(S) \quad \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \\ & & z & = & b & L_2 \\ & -y & + & z & = & c & L_3 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & 2z & = & a & L_1 \leftarrow L_1 \\ & y & & = & b - c & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & z & = & b & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est triangulaire. La matrice A est donc inversible.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b & L_1 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ y = b - c & L_2 \leftarrow L_2 \\ z = b & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

★ Matrice inverse par pivot de Gauss

Exemple : calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 - L_3 \end{array}$$

(on s'est servi de L_1 , et on a fait apparaître des 0 dans la matrice de gauche en première position des lignes 2 et 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

(on s'est servi de L_2 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 3)



La matrice de gauche est triangulaire à pivots non nuls donc A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

(on s'est servi de L_3 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en dernière position des lignes 1 et 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

(on s'est servi de L_2 , et on a fait apparaître un 0 dans la matrice de gauche en deuxième position de la ligne 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow -L_3$$

(on ajuste les coefficient diagonaux de la matrice de gauche)

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

III. Puissance n -ième d'une matrice

★ Le calcul de la puissance n -ième d'une matrice est un exercice délicat.

Deux exceptions notables :



- La puissance n -ième d'une matrice diagonale est obtenue en élevant à la puissance n ses éléments diagonaux.

Exemple : si $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale.

Ce résultat est à savoir. Il se démontre par récurrence.

- Si la « formule » est donnée, on peut la démontrer par récurrence.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

★ Puissance n -ième à l'aide de suites

Exercice corrigée : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ où (a_n) est la suite définie par

$$a_1 = 1 \text{ et } a_{n+1} = 1 + 2a_n.$$

2. Calculer a_n . En déduire A^n .

Correction :

1. Démontrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

• $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^1$. La propriété est vraie au rang 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2a_n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a_n) est une suite arithmético-géométrique (voir partie correspondante).

On trouve $a_n = 2^n - 1$ puis $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

★ **Puissance n -ième et formule du binôme de Newton**

Le principe est le suivant : on dispose

- d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale
- on a prouvé que $N = A - I$ est une matrice nilpotente (ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang, en général, $N^3 = O$).

→ On calcule alors A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exemple : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geq 2$, calculer A^n en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme. (On sait que $N^3 = O$).



• pour $k \geq 3$, $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times O = O$

• $A^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \times I^{n-k} = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$.

Il ne « reste » plus qu'à effectuer le calcul à l'aide de N et N^2 ...

★ Puissance n -ième à l'aide d'une matrice diagonale

Le principe est le suivant : on dispose

- de deux matrices A et P .
- on a calculé P^{-1} puis on a prouvé que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
- on connaît donc D^n .
- Notons que $D = P^{-1}AP$ s'écrit $A = PDP^{-1}$.



On démontre alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$:

- $PD^0P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = A^0$.
La propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n \times (P^{-1} \times P) \times DP^{-1}.$$

$$A^{n+1} = PD^n \times I \times DP^{-1} = P \times (D^n \times D) \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}.$$
 La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il ne « reste » plus qu'à effectuer le calcul : $P \times D^n \times P^{-1} \dots$

Probabilités



I. Généralités

★ Formule du crible :

Pour tous événements A et B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

★ Événements contraires

Si A est un événement et $\bar{A}$ son événement contraire, alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

★ Événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$p(A \cap B) = 0 ;$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) .$$

★ Équiprobabilité

Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

II. Dénombrements

★ Tirages successifs avec ou sans remise

On utilise le **principe multiplicatif**.

Exemples :

Si on tire 4 boules successivement avec remise dans une urne en contenant 6, on a :

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296 \text{ résultats possibles.}$$

Si on tire 4 boules successivement sans remise dans une urne en contenant 6, on a :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ résultats possibles.}$$



★ Tirages simultanés & nombres « k parmi n »

- Factorielle d'un entier naturel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$.

- Le nombre de tirages de k boules dans une urne parmi n est : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Ce nombre se calcule à l'aide de la formule ou à l'aide du triangle de Pascal.



$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{n} = 1 ; \binom{n}{1} = n ; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

III. Probabilités conditionnelles

★ Probabilité conditionnelle :



on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

★ Événements indépendants :



- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$.

★ Formule des probabilités composées :

La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire :

Soient A et B des événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$. Alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Cette formule se généralise par la formule des probabilités composées :



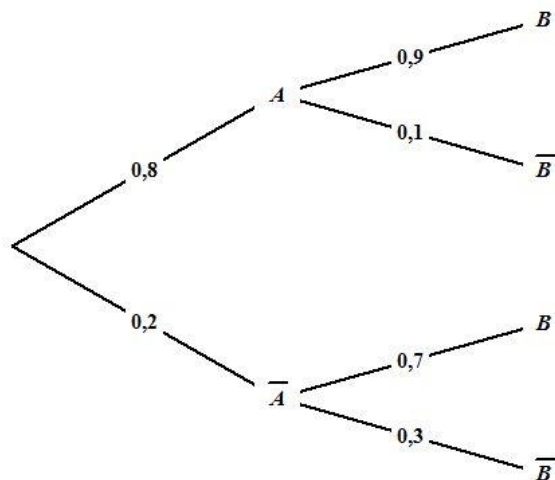
Soient A_1 , A_2 et A_3 des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$.

Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.

Soient A_1 , A_2 , ..., A_m des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$.

Alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$.

★ Arbre à calculs et formule des probabilités totales

Exemple :**Rédaction « type »**

- A et $\bar{A}$ constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

- $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

$$P(B) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,7$$

$$P(B) = 0,72 + 0,14 = 0,86$$

(on peut aussi noter $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$)**IV. Lois de probabilités discrètes**

★ Généralités :

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X , c'est présenter l'ensemble des valeurs x_i prises par X et calculer les probabilités $P[X = x_i]$ correspondantes.

Cette présentation se fait généralement à l'aide d'un tableau ou à l'aide d'une formule.

★ Fonction de répartition :

- La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = p(X \leq x).$$

- On a donc : $p(X \leq a) = F(a)$, $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ et $p(X \geq a) = 1 - F(a)$

★ Variable aléatoires discrètes finies

• **Espérance :**

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = \sum_i x_i p[X = x_i]$$

• **Variance :**

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2.$$



Formule de Koenig-Huygens : on démontre que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$\text{Ainsi, } V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

$$\text{Remarque : } E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$

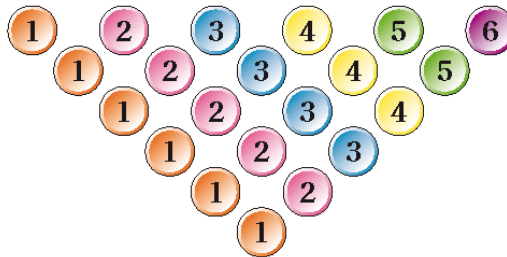
• **Écart type :**

$$\text{Écart type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice corrigé :

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.



Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$.
4. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Correction :

1. Chaque jeton rapporte 1 à 6 euros et la mise est de 3 euros. Donc $X(\Omega) = \llbracket -2, 3 \rrbracket$.

2. Il y a 6 jetons numérotés 1 sur les 21. Donc $p(X = -2) = \frac{6}{21}$.

On procède de la même façon pour les autres valeurs pour obtenir la loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$3. E(X) = \frac{6}{21} \times (-2) + \frac{5}{21} \times (-1) + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 2 + \frac{1}{21} \times 3 = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}.$$

$$4. E(X^2) = \frac{6}{21} \times (-2)^2 + \frac{5}{21} \times (-1)^2 + \frac{4}{21} \times 0^2 + \frac{3}{21} \times 1^2 + \frac{2}{21} \times 2^2 + \frac{1}{21} \times 3^2$$

$$E(X^2) = \frac{6}{21} \times 4 + \frac{5}{21} \times 1 + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{3}{21} \times 1 + \frac{2}{21} \times 4 + \frac{1}{21} \times 9 = \frac{49}{21} = \frac{7 \times 7}{7 \times 3} = \frac{7}{3}$$

On en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{9} = \frac{21-1}{9} = \frac{20}{9}.$$

$$\text{Finalement, } \sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3}.$$



★ Propriétés de l'espérance

Par linéarité de l'espérance :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$



★ Propriétés de la variance

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Si X et Y sont *indépendantes* : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque : dans le cas général, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

V. Lois de probabilités usuelles discrètes

★ Loi certaine :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a . On a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{a\} & ; & & P[X = a] &= 1. \\ E(X) &= a & ; & & V(X) &= 0. \end{aligned}$$



★ Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \llbracket 1, n \rrbracket & ; & & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P[X = k] &= \frac{1}{n} \\ E(X) &= \frac{n+1}{2} & ; & & V(X) &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.



★ Loi de Bernoulli

On considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue de l'épreuve et 0 sinon.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p .

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0; 1\} & ; & & P[X = 1] &= p \text{ et } P[X = 0] = 1-p \\ E(X) &= p & ; & & V(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$



★ Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \llbracket 0, n \rrbracket & ; & & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) &= n p & ; & & V(X) = n p (1-p) \end{aligned}$$

Exemple :

On lance dix fois un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois que le 5 est obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Rédaction « type »

On effectue 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : le 5 est obtenu, avec la probabilité $1/6$;
- échec : le 5 n'est pas obtenu, avec la probabilité $5/6$.

X compte le nombre de succès.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et $1/6$.

Dès lors, dans cet exemple :

- $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket$
- Pour tout entier $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$
- $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
- $V(X) = n \times p \times (1-p) = \frac{5}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$



★ Loi géométrique

La loi géométrique de paramètre p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes, la variable aléatoire X étant le temps d'attente du premier succès.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et on a :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbb{N}^* & ; & \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X = k) = p(1-p)^{k-1} \\ E(X) &= \frac{1}{p} & ; & \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Exemple :

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. On note Y le rang de du premier pile obtenu. Quelle est la loi suivie par Y ?



Rédaction « type »

On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : pile est obtenu, avec la probabilité 0,3 ;
- échec : face est obtenu, avec la probabilité 0,7.

Y est le temps d'attente du premier succès.

Y suit donc la loi géométrique de paramètre 0,3.

Dès lors, dans cet exemple :

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = 0,7^{k-1} \times 0,3$
- $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0,7}{0,09} = \frac{70}{9}$





VI. Loi conjointe et couple de variables aléatoires

★ Loi conjointe :

Soient X et Y deux variables aléatoires.

On appelle loi conjointe la loi de probabilité du couple (X, Y) .

Exemple :

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

- Les lois obtenues par sommation des lignes et des colonnes sont appelées lois marginales. Il s'agit en fait de la loi de X et de celle de Y .
- On a $P([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0,3$ et on peut vérifier que la somme de toutes les probabilités est égale à 1.

★ Indépendance de variables aléatoires conjointes

On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x_i, y_j) \in \{0,1\} \times \{0,1,2\}, P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i]) \times P([Y = y_j]).$$

Exemple :

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
$X = 1$	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
Loi de Y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

$$P([X = 0]) \times P([Y = 0]) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}. \text{ Or } P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{16}{49}.$$

On vérifie les trois autres cas... X et Y sont indépendantes.

(ce n'était pas le cas dans l'exemple d'avant).

★ Covariance

- On appelle **covariance** de X et Y et on note $\text{cov}(X, Y)$ le réel
 $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ avec $E(XY) = \sum x_i \times y_j \times P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$
 et où $E(X)$ et $E(Y)$ sont les espérances respectives de X et Y .
- Si $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ alors X et Y ne sont pas indépendantes (réciproque fausse).
- Dans le cas général, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.
- $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$.



Exemple :

$X \backslash Y$	0	1	2	Loi de X
0	0,1	0,1	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0,3	0,6
Loi de Y	0,2	0,3	0,5	1

$$E(X) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,6 = 0,6.$$

$$E(Y) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,5 = 1,3.$$

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,1 + 0 \times 1 \times 0,1 + 0 \times 2 \times 0,2 + 1 \times 0 \times 0,1 + 1 \times 1 \times 0,2 + 1 \times 2 \times 0,3 = 0,8.$$

$$\text{cov}(X, Y) = 0,8 - 0,6 \times 1,3 = 0,8 - 0,78 = 0,02$$

★ Coefficient de corrélation

- Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
- On a :
 - $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
 - $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
 - $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, $Y = aX + b$ avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
 - Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$, alors $\rho(\lambda X, \mu Y) = \rho(X, Y)$.

Scilab



I. Interaction avec l'utilisateur

- ★ La commande **x=input('message')** écrit le message à l'écran, attends la réponse de l'utilisateur et stocke cette réponse dans la variable x.
- ★ La commande **disp('message')** écrit le message (entre guillemets) à l'écran.
La commande **disp(u)** écrit à l'écran la valeur de la variable u.



II. Nombres et opérations élémentaires

- ★ Les nombres décimaux se notent avec un point et non une virgule.
- ★ Le signe = est réservé à l'affectation d'une variable (par exemple : x=3).
- ★ Constantes prédéfinies : %pi pour π et %e pour e.
- ★ Fonctions usuelles :
 - La commande **log(x)** calcule $\ln(x)$.
 - La commande **exp(x)** calcule e^x .
 - La commande **floor(x)** calcule la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.
 - La commande **abs(x)** calcule $|x|$, la valeur absolue de x.
 - La commande **sqrt(x)** calcule $\sqrt{x}$.
 - La commande **ceil(x)** renvoie le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.
- ★ Opérations arithmétiques : ne pas oublier les parenthèses le cas échéant.
 - Addition : +, soustraction : -, multiplication : *, division : / et puissance : ^.
- ★ Opérateurs de comparaisons pour les tests :
 - Test d'égalité : == (à ne pas confondre avec l'affectation d'une variable).
 - Test de différence : <>.
 - Tests de comparaison : <, <=, >, >=.
 - Commandes **and** et **or** pour les tests logiques.

III. Matrices

★ Création de vecteurs et matrices

- Vecteur ligne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des espaces ou des virgules.

<pre>--> [-2 1 1.5] ans = -2. 1. 1.5</pre>	<pre>--> [2,1,1.5] ans = 2. 1. 1.5</pre>
---	---

- Vecteur colonne : les éléments sont écrits entre crochets et séparés par des points virgules.

```
--> [-2;1;1.5]
ans =
-2.
1.
1.5
```



- Matrice : les éléments sont écrits entre crochets ; les éléments d'une ligne sont séparés par des virgules ; les lignes sont séparées par des points virgules.

```
--> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
A =
1.   2.   3.
4.   5.   6.
7.   8.   9.
```

★ Création automatique de vecteurs lignes (utile pour les graphiques)



- La commande **a:b** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de a à b espacées de 1.

```
--> 1:6
ans =
1.   2.   3.   4.   5.   6.
```

- La commande **a:p:b** renvoie un vecteur ligne contenant toutes les valeurs de a à b espacées de p .

<pre>--> 0:0.2:1 ans = 0. 0.2 0.4 0.6 0.8 1.</pre>	<pre>--> 1:3:14 ans = 1. 4. 7. 10. 13.</pre>
---	---

- La commande **linspace(a,b,n)** renvoie un vecteur ligne contenant n valeurs équiréparties entre a et b .

```
--> linspace(0,10,6)
ans =

    0.    2.    4.    6.    8.   10.
```

★ Matrices prédéfinies



- La commande **zeros(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ (n lignes et p colonnes) remplie de 0.

```
--> zeros(3,5)
ans =

    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.

--> zeros(1,6)
ans =

    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

- La commande **ones(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ remplie de 1.

```
--> ones(4,3)
ans =

    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
```

- La commande **eye(n,p)** renvoie une matrice de taille $n \times p$ avec des 1 sur la « diagonale » et des 0 ailleurs (eye(3,3) renvoie donc à I_3 par exemple).

```
--> eye(3,5)
ans =

    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.
```

★ Opérations sur les matrices



- La commande **$u(k)$** renvoie le k -ième élément d'un vecteur u .

```
--> u=1:2:15
u =

    1.    3.    5.    7.    9.   11.   13.   15.

--> u(4)
ans =

    7.
```



- La commande **$\text{length}(u)$** renvoie la taille (la longueur) du vecteur u .
- La commande **$\text{inv}(A)$** renvoie l'inverse d'une matrice carrée A .
- La commande **A'** renvoie la transposée de la matrice A .
- Les commandes **$A+B$, $A-B$, $A*B$, A^n** traduisent les opérations connues sur les matrices.
- Les commandes **$A.*B$, $A./B$, $A.^n$** (avec le point) sont des opérations composantes par composantes, utiles dans les représentations graphiques de fonctions.
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande **$u(k) = \dots$** modifie ou rajoute un élément à la k -ième position. Cela permet de construire un vecteur pas à pas (très utile pour les suites).



```
--> u=[1,2,3];

--> u(4)=8.5
u =

    1.    2.    3.    8.5

--> u(7)=-2
u =

    1.    2.    3.    8.5    0.    0.   -2.
```

- La commande **$A(i,j)$** renvoie le coefficient $a_{i,j}$ (i -ième ligne et j -ième colonne) de la matrice A .
- La commande **$A(i,:)$** renvoie la i -ième ligne de la matrice A .
- La commande **$A(:,j)$** renvoie la j -ième colonne de la matrice A .
- Si u est un vecteur déjà défini, la commande **$u=[u,x]$** rajoute l'élément x à la fin du vecteur u .
- La commande **$\text{spec}(A)$** renvoie les valeurs propres de A dans un vecteur colonne.
- La commande **$[P,D]=\text{spec}(A)$** renvoie une matrice diagonale D contenant les valeurs propres de A et une matrice P contenant les vecteurs propres associés.

IV. Structures fondamentales



★ Boucle for

- Structure classique :


```

      ..①..
      for ..②.. (do)
          ..③..
      end
      
```
- Il s'agit d'une boucle dont **on contrôle le nombre de répétitions** grâce à la condition ②.
- ① représente en général les conditions initiales.
- ② s'exprime sous la forme $k=a:b$. C'est-à-dire qu'une variable k est créée puis qu'elle va prendre une à une toutes les valeurs de a jusqu'à b . Par exemple, la condition $k=1:n$ signifie qu'il y aura n répétitions de l'instruction ③.
- L'instruction ③ sera répétée autant de fois que la condition ② le prévoit.
- **Exemples :**

Script 1

```

u=1
for k=1:4
    u=u+2
end
disp(u)

```

Explication 1

Au début, u vaut 1

4 répétitions « +2 » sont programmées

Affichage 1

9

Script 2

```

u=zeros(1,5)
u(1)=1
for k=1:4
    u(k+1)=u(k)+2
end
disp(u)

```

Explication 2

Au début, u vaut 0,0,0,0,0

Puis u vaut 1,0,0,0,0

4 répétitions sont programmées
on calcule $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ et $u(5)$

Affichage 2

1. 3. 5. 7. 9.

Script 3

```

u=ones(1,5)
for k=2:5
    u(k)=u(k-1)+2
end
disp(u)

```

Explication 3

Au début, u vaut 1,1,1,1,1

4 rép. sont programmées
on calcule $u(2)$, ... , $u(5)$

Affichage 3

1. 3. 5. 7. 9.

★ Boucle **while**

- Structure classique :


```

      ..①..
      while ..②.. do
          ..③..
      end
      
```
- Il s'agit d'une boucle dont **on ne contrôle pas le nombre de répétitions**. La boucle continue tant que la condition ② est valable.
- Cette structure est adaptée lorsque l'on recherche un seuil à atteindre ou à dépasser.
- Il est souvent intéressant de créer un compteur de boucles pour savoir combien de boucles ont été effectuées.
- **Exemples :**

Script 1

```

u=1
while u<=10000
    u=u*2
end
disp(u)

```

Affichage 1

16384

Script 2

```

u=1
n=0
while u<=10000
    u=u*2
    n=n+1
end
disp(n)

```

Affichage 2

14

Explication 1 :

Ce script décrit les termes d'une suite géométrique de raison 2. Au début u vaut 1. Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2. En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000. À ce moment-là, u vaut 16384.

Explication 2 :

Au début u vaut 1 et n vaut 0. Tant que u est inférieur ou égal à 10000 (ce qui est le cas au début), on le multiplie par 2, mais, dans le même temps, n est augmenté de 1. n est donc un **compteur de boucles**. En multipliant par 2, u augmente. La boucle s'arrête dès qu'il dépasse 10000. À ce moment-là, il y a eu 14 boucles d'effectuées.



★ Structures conditionnelles

if :

```

if .... then
    ....
end

```

if / else :

```

if .... then
    ....
else
    ....
end

```

If / elseif / else :

```

if .... then
    ....
elseif ... then
    ....
else
    ....
end

```

Exemple : que calcule le programme suivant ?

```

function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
a=0
b=2
e=10^-5
while b-a>e
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)>0 then a=m
    else b=m
    end
end
disp(m)

```

Ce programme calcule la valeur approchée d'une équation de type $f(x) = 0$ (en général en lien avec le théorème de la bijection).

Ici, $f(x) = x^2 - 2$. Comme on travaille sur l'intervalle $[0, 2]$, ce programme calcule une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$.

V. Graphiques

★ Fonction d'une variable



- La commande **plot(x,y)** ou **plot2d(x,y)** (avec x et y deux vecteurs de même taille) trace une courbe reliant les points de coordonnée (x, y), ((x, y) parcourant les vecteurs x et y).
- La commande **plot2d(x,y,-0)** (avec l'option -0) trace les points de coordonnées (x, y) sans les relier entre eux (pour tracer les termes d'une suite par exemple).

- **Exemple :**

Une première méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur $[0, 2]$ est

```
x=0:0.1:2
y=(x.^2).*exp(-x)           // penser au . pour la multiplication terme à terme
plot(x,y)                   // ou plot2d(x,y)
```

- La commande **plot(x,f)** ou **fplot2d(x,f)** (avec f une fonction définie en Scilab et x un vecteur pour les abscisses) trace le graphe de la fonction f.

- **Exemple :**

Une deuxième méthode pour tracer la courbe de la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est :

```
function y=f(x)
    y=x^2*exp(-x)
endfunction
```

```
x=0:.1:2
plot(x,f) // ou fplot2d(x,f)
```

★ Diagrammes et histogrammes



- La commande **bar(x,y)** (avec x et y deux vecteurs de même longueur) trace un diagramme en bâtons avec x en abscisses et y en ordonnées.



- La commande **histplot(x,y)** (avec x et y deux vecteurs) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur y en utilisant les classes x.

- La commande `histplot(n, y)` (avec `n` un entier et `y` un vecteur) dessine un histogramme des données contenues dans le vecteur `y` en `n` classes équiréparties.
- La commande `histplot` peut être utilisée en probabilité pour « reconnaître » des lois de variables aléatoires connues (discrètes ou à densité)
- La commande `pie(x)` (avec `x` un vecteur de nombres réels strictement positifs) trace un diagramme en camembert avec des secteurs proportionnels aux réels de `x`.