

E.C.P. Lycée Jean PERRIN



Problèmes corrigés de
MATHÉMATIQUES
posés aux concours des grandes écoles commerciales



CPGE ECP

Vers les hautes études
pour les pros

Julien Fernandez

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les annales en ECT

2015-2021

Version Python

Julien Fernandez

Table des matières

Ecricome Sujet zéro 2023 Énoncé	5
Extraits autres sujets zéro 2023 Énoncé	11
ESC 2021 Énoncé.....	14
Ecricome 2021 Énoncé.....	20
ESCP 2021 Énoncé	27
ESC 2020 Énoncé.....	32
Ecricome 2020 Énoncé.....	38
ESCP 2020 Énoncé	45
ESC 2019 Énoncé.....	51
Ecricome 2019 Énoncé.....	56
ESCP 2019 Énoncé	62
ESC 2018 Énoncé.....	68
Ecricome 2018 Énoncé.....	73
ESCP 2018 Énoncé	78
ESC 2017 Énoncé.....	84
Ecricome 2017 Énoncé.....	89
ESCP 2017 Énoncé	94
ESC 2016 Énoncé.....	100
Ecricome 2016 Énoncé.....	105
ESCP 2016 Énoncé	110
ESC 2015 Énoncé.....	115
Ecricome 2015 Énoncé.....	121
ESCP 2015 Énoncé	126
Ecricome sujet zéro 2023 Corrigé	131
Extraits autres sujets zéro 2023 Corrigé.....	140

ESC 2021 Corrigé	143
Ecricome 2021 Corrigé	151
ESCP 2021 Corrigé	164
ESC 2020 Corrigé	175
Ecricome 2020 Corrigé	184
ESCP 2020 Corrigé	193
ESC 2019 Corrigé	205
Ecricome 2019 Corrigé	214
ESCP 2019 Corrigé	224
ESC 2018 Corrigé	235
Ecricome 2018 Corrigé	244
ESCP 2018 Corrigé	256
ESC 2017 Corrigé	270
Ecricome 2017 Corrigé	280
ESCP 2017 Corrigé	290
ESC 2016 Corrigé	300
Ecricome 2016 Corrigé	310
ESCP 2016 Corrigé	320
ESC 2015 Corrigé	333
Ecricome 2015 Corrigé	344
ESCP 2015 Corrigé	354

Ecricome Sujet zéro 2023 Énoncé

Exercice 1

Partie A

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note également $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que V_1 , V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de M et préciser leur valeur propre associée.
2. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
3. (a) Établir l'existence d'une matrice diagonale D que l'on précisera, telle que $D = P^{-1}MP$.
(b) Montrer en raisonnant par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}.$$

4. Pour tout entier naturel n , expliciter la matrice D^n , puis montrer que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B

Une puce se déplace sur un escalier de trois marches dont les marches sont notées M_0 pour la plus basse, M_1 pour celle du milieu et M_2 pour la marche la plus haute, selon les règles suivantes :

- À l'instant initial 0, elle est sur la marche la plus haute M_2 .
- Si elle est sur la marche M_2 à l'instant n , elle est à l'instant $n+1$ de façon équiprobable sur l'une des trois marches M_0 , M_1 ou M_2 (elle peut donc en particulier rester sur la marche M_2).

- Si elle est sur la marche M_1 à l'instant n , elle est à l'instant $n+1$ de façon équiprobable sur l'une des deux marches M_0 ou M_1 (elle ne peut pas remonter sur la marche M_2)
- Si elle est sur la marche M_0 à l'instant n , elle reste à l'instant $n+1$ sur la marche M_0 (elle ne peut pas remonter sur une des autres marches).

Pour tout entier naturel n , on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant la hauteur de la marche où se trouve la puce à l'instant n . Ainsi, par exemple, $(X_n = 1)$ désigne l'événement : « la puce se trouve sur la marche M_1 à l'instant n ».

On note $E(X_n)$ l'espérance de la variable aléatoire X_n .

5. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n , à l'aide de la formule des probabilités totales, les probabilités $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et M est

la matrice définie en **partie A**.

- (c) Préciser U_0 et exprimer sans démonstration pour tout entier naturel n , U_n en fonction de M^n et U_0 .

- (d) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

- (e) Déterminer quand n tend vers $+\infty$ les limites de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$

6. Déterminer pour tout entier naturel n l'espérance $E(X_n)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

7. On considère le script Python ci-dessous :

```
import numpy as np
M=np.array([[1,1/2,1/3],[0,1/2,1/3],[0,0,1/3]])
U=np.array([[0],[0],[1]])
n=0
while U[0]<0.999:
    n+=1
    U=np.dot(M,U)
print(n)
```

Que permet de calculer ce script ?

On rappelle que la commande `np.dot` effectue le produit entre deux matrices.

8. On appelle T la variable aléatoire qui vaut n si la puce atteint la marche M_0 pour la première fois à l'instant n .

(a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par T .

(b) On suppose avoir importé la librairie Python `numpy.random` sous l'abréviation `rd`. Expliquer le fonctionnement de l'instruction Python `floor(rd.random() * (A+1))` où A désigne un nombre entier naturel fixé.

(c) On souhaite simuler une réalisation de T .

Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que la fonction `simulT` convienne.

```
import numpy.random as rd
def simulT():
    A=2
    n=0
    while A .....
        n = .....
        A = np.floor(rd.random()*(A+1))
    return .....
```

(d) On exécute le script Python ci-dessous :

```
esp = 0
for i in range(10000):
    esp = esp + simulT()/10000
print(esp)
```

La console affiche 2.4952. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

1. (a) Calculer u_2 et u_3 .

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

(b) Compléter la fonction Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur n et renvoie la valeur de u_n .

```
def suite(n):
    u=2/3
    for k in range(1,n+1):
        u=.....
    return u
```

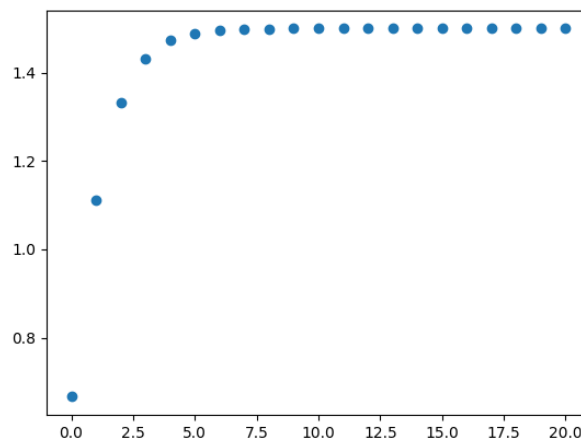
2. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.$$

3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.
4. Le script Python ci-dessus introduit les variables z et y .

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
n=20
x=[k for k in range(1,n+1)]
y=[suite(k) for k in x]
z=np.cumsum(y)
plt.plot(x,z,'o')
plt.show()
```

Après l'exécution de ce script, le graphique suivant apparaît :



- (a) Expliquer le rôle des variables y et z .
- (b) Que peut-on conjecturer à propos de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$?
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$.
- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- (b) En déduire pour tout entier n non nul, l'expression de v_n en fonction de n .
- (c) Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.
6. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout n entier naturel non nul, $P(X_n = n) = v_n$.
- (a) Reconnaître la loi de X puis calculer son espérance $E(X)$.
- (b) En déduire sans nouveau calcul que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et donner la valeur de sa somme.
- (c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la fonction g est impaire.
Interpréter graphiquement votre résultat.
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
Interpréter graphiquement votre résultat.
3. (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $g'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
(b) Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout réel x .
(c) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_g$. On donne $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$.
5. Soit A un réel strictement positif. On pose : $I(A) = \int_0^A x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

$$\text{Montrer que : } I(A) = 1 - e^{-\frac{1}{2}A^2}.$$

6. On considère à présent la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, X désigne une variable aléatoire de densité f .

7. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .
(b) Calculer la probabilité $P(1 \leq X \leq 2)$.
8. On rappelle que la densité usuelle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

- (a) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$, puis justifier que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
- (b) Soit $A > 0$. On pose : $J(A) = \int_0^A x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

$$\text{À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : } J(A) = -A e^{-\frac{1}{2}A^2} + \int_0^A e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

- (c) En déduire que l'espérance $E(X)$ existe et déterminer sa valeur.

9. On pose $Y = X^2$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .
- (a) Déterminer pour tout réel x le nombre $G(x)$.
- (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, puis déterminer son espérance et sa variance.
On admet que réciproquement si Y est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ alors la variable aléatoire $X = \sqrt{Y}$ admet pour densité la fonction g .
- (c) On rappelle que dans la librairie `numpy.random` importée ici sous l'abréviation `rd`, se trouve la commande `rd.exponential(alpha, n)` qui simule n fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha}$ et stocke les n réalisations ainsi obtenues dans une matrice ligne contenant n colonnes.
Donner un script Python permettant de simuler 10 fois la variable aléatoire Y .
- (d) En déduire un script Python permettant de simuler 10 fois la loi de X .

Extraits autres sujets zéro 2023 Énoncé

Ecricome ECG Mathématiques Appliquées

Exercice 1

Soit p un réel fixé dans l'intervalle $]0, 1[$.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ mutuellement indépendantes, de même loi, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(Y_n = -1) = 1 - p.$$

Posons :

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python `simulY(p)` qui prend en argument la valeur de p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_0 , c'est-à-dire qu'elle doit renvoyer 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité $1 - p$.
2. Écrire une fonction Python `marche(n, p)` prenant en argument le couple (n, p) et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n .

Exercice 2

Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $F_n > 0$ et $F_{n+1} > 0$.
(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir du rang 2.
(c) Démontrer que $F_n \geq n - 1$ pour tout entier n .
(d) En déduire que $(F_n)_{n \geq 0}$ diverge et préciser sa limite.

2. Écrire une fonction Python `fibonacci(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur de F_n .

Si on exécute le script Python suivant

```
L=[]
for k in range(20) :
    L.append(fibonacci(k))
print(L)
```

on doit obtenir :

```
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181]
```

3. Écrire une fonction `recherche(x, L)` prenant en entrée :
- un entier naturel x
 - une liste L déjà triée dans l'ordre croissant, dont le premier élément est inférieur ou égal à x et le dernier est strictement supérieur à x
- et qui renvoie le plus grand élément de la liste L qui soit inférieur ou égal à x .

HEC-ESSEC ECG Mathématiques Appliquées

Exercice

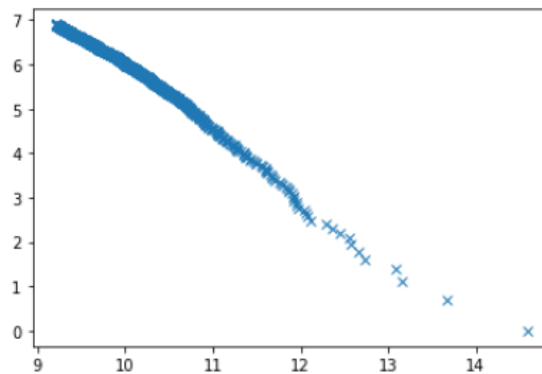
On souhaite modéliser la loi de probabilité de la variable aléatoire T qui à une ville, choisie au hasard parmi les villes françaises, associe l'effectif de sa population. On note n le nombre de villes.

1. Pour 2018, on dispose d'un fichier `Data1.csv` de données provenant de l'INSEE et on utilise la bibliothèque Pandas.

On exécute les instructions suivantes :

```
import pandas as pd
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
dataset=pd.read_csv('Data1.csv',sep=";")
donnees=dataset[["Libellé","Population" ]]
donnees=donnees.sort_values(by=["Population","Libellé"]
                           ascending=False,ignore_index=True)
logPopu=[np.log(t) for t in donnees["Population"]]
logRang=[np.log(k) for k in range (1,len(logPopu)+1)]
plt.plot(logPopu,logRang,'*')
```

ce qui produit le graphique suivant :



Expliquer pourquoi le programme et le graphique précédent justifient qu'il existe deux réels a et b tels que, pour toute ville, le réel $\frac{a}{t^b}$, où t est l'effectif de celle-ci, est une approximation raisonnable du rang de celle-ci dans la liste des villes classées par ordre décroissant de population ?

Quelle grandeur peut-on calculer pour confirmer ce que l'on constate graphiquement ?

Quelle méthode peut-on utiliser pour obtenir le meilleur couple (a, b) en un certain sens ?

On suppose désormais que T suit une loi qui admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \theta \frac{x_0^\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } \theta > 1 \text{ et } x_0 > 0.$$

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de T .

b) Montrer que $E(T)$ existe et vaut $\frac{\theta}{\theta-1} x_0$.

ESC 2021 Énoncé

Exercice 1

Une matrice carrée M est dite idempotente si elle vérifie $M^2 = M$.

1. Exemple.

Vérifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est idempotente. Le détail des calculs doit

apparaître sur la copie.

2. Quelques propriétés.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice carrée d'ordre n idempotente.

a) Vérifier que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de M .

b) Quelles sont les seules valeurs propres possibles de M ?

c) On pose $N = I_n - M$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n . Montrer que N est idempotente.

3. Application à l'étude des puissances d'une matrice.

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2 - C$.

a) Montrer que C et D sont idempotentes. Calculer CD et DC .

b) On pose $B = 2C + D$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $B^n = 2^n C + D$.

Calculer, pour tout entier naturel n , les quatre coefficients de B^n .

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .

d) Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que : $P^{-1}AP = B$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PB^nP^{-1}$.

f) Déduire de la question précédente et de 3.b), en détaillant les calculs, que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6 \times 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Justifier que pour tout réel x on a : $x^2 + x + 1 > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.

4. a) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

- b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.

5. a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ d'inconnue x admet exactement deux solutions : -1 et 0 .

- b) Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a pour équation $y = x$.
Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse -1 .

6. a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x on a :

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

- b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. a) Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution α dans $[0; +\infty[$.

- b) On donne $\ln(3) \approx 1,1$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

- c) Vérifier que $f(-1-\alpha) = 1$.

- d) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

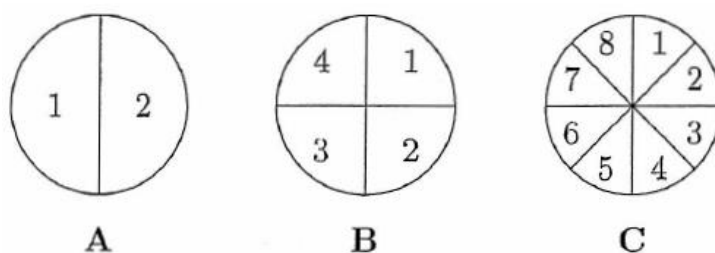
```

1. import numpy as np
2. def f(x):
3.     return ...
4. a=0
5. b=...
6. while b-a>10**(-3):
7.     c=...
8.     if f(c)<1 : a=...
9.     else : b=...
10. print(...)
```

8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \approx 0,9$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,3$; $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0,4$; $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1,4$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en 5.b).

Exercice 3

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.

- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B , il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B .
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C . Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n -ème fléchette le joueur tire vers la cible A ». On définit de même l'événement B_n . On note enfin a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n .

Le joueur commençant par la cible A on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. a) Calculer les probabilités a_2 et b_2 .
b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n.$$

3. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et de b_n l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.

```

1.  n=int(input('a ?'))
2.  a,b=1,0
3.  for k in range(2,n+1) :
4.      b=3/4*b+1/2*a
5.      a=1/2*a
6.  print(a,b)
```

- b) Si on échange les lignes 4. et 5. le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

- a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$.

- b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- c) Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $v_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$

6. On rappelle que, après import de la librairie `numpy.random` sous l'abréviation `rd`, la commande `rd.randint(1, n+1)` permet de simuler la loi uniforme sur $1, n$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 10 et 11 afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X .

```
1.  cible="a"
2.  n=1
3.  while cible!="c":
4.      n+=1
5.      if cible=="a" :
6.          secteur=rd.randint(1,3)
7.          if secteur==1 : cible="b"
8.      else :
9.          if cible=="b" :
10.             secteur=...
11.             if ... : ...
12.  print(n)
```

7. Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

- a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\frac{1}{8}$.

20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

- b) Reconnaître la loi de Y . Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $P(Y = k)$ pour tout entier k appartenant à cet ensemble.
- c) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- d) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain en euros du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.
- Justifier que $G = 2(20 - Y) - 2Y$. Calculer le gain moyen du forain.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = e^{-t/2} - e^{-t} \text{ si } t \geq 0.$$

1. **a)** Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.
- b)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- c)** Soit a un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

- d)** Dédire des questions précédentes que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.

2. Soit F la fonction de répartition de X .
 - a)** Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$.
 - b)** Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $F(x) = 1 - 2e^{-x/2} + e^{-x}$.
3. **a)** Soit Y une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre $a \in]0 ; +\infty[$. Donner une densité de Y . Rappel l'espérance de Y .
 - b)** En déduire que $\int_0^{+\infty} t e^{-at} dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}$.
 - c)** Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = 3$.

Ecricome 2021 Énoncé

EXERCICE 1

On note dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les deux suites u_n $n \in \mathbb{N}$ et v_n $n \in \mathbb{N}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n, \\ v_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$$

1. (a) Calculer le produit matriciel $M - I$ $M + 3I$.
(b) Déterminer un polynôme P non nul, annulateur de la matrice M .
(c) Déterminer les valeurs propres possibles de M .
2. (a) À l'aide de la question 1. (a), déterminer l'expression de M^2 en fonction des matrices M et I .
(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = u_n M + v_n I$.
3. (a) Déterminer la matrice carrée d'ordre 2 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(c) On considère les deux scripts incomplets **Python** ci-dessous. A désigne la matrice A et C désigne la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Compléter ces deux scripts pour qu'ils calculent et affichent les termes u_n et v_n pour un entier naturel n choisi par l'utilisateur.

```
#script1
import numpy as np
n=int(input('n= '))
A=np.array([[...], [...]])
C=np.array([[0], [1]])
C=.....
print(...)
```

```
#script2
import numpy as np
n=int(input('n= '))
A=np.array([[...], [...]])
C=np.array([[0], [1]])
for k in range(n):
    C=.....
print(...)
```

4. On considère les matrices colonnes $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de la matrice A .

Préciser pour chacun la valeur propre associée.

(b) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre 2 dont les colonnes sont les vecteurs V_1

et V_2 . Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1} .

(c) Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$.

(d) Montrer par récurrence que pour tout entier n , on a : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

(e) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}.$$

(f) Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n .

5. (a) Expliciter, pour tout entier naturel n , les neuf coefficients de la matrice M^n .

(b) On suppose avoir complété correctement l'un des deux scripts **Python** de la question

3. (c) et on rajoute les lignes suivantes :

```
M=np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
I=np.eye(3)
print(C[0,0]*M+C[1,0]*I)
```

Que renvoie ce nouveau script lorsqu'on choisit une valeur de l'entier naturel n ?

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. (a) Donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement votre résultat.
(b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f'(x)$, et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1 - \ln(x)$.
(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f , en faisant apparaître les valeurs des extremums et la limite en $+\infty$.
2. (a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f''(x)$.
(b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
(c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
3. On note M le point d'abscisse $e^{3/2}$ de $\mathcal{C}_f$.
(a) Déterminer les coordonnées de M .
(b) Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point M .
(c) Calculer les coordonnées du point d'intersection N de (T) avec l'axe des ordonnées.
(d) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T) sur $[1; +\infty[$.
4. On donne

$$e \approx 2,72, \quad \frac{1}{e} \approx 0,37, \quad e^{3/2} \approx 4,48, \quad f(e^{3/2}) \approx 0,33, \quad f'(e^{3/2}) \approx -0,02, \quad \frac{2}{e^{3/2}} \approx 0,45.$$

Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en plaçant sur le même graphique le point M , le point N , ainsi que la droite (T) .

On pourra par exemple choisir un repère où l'axe des abscisses a pour unité 1 cm, et l'axe des ordonnées a pour unité 4 cm.

5. (a) Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$.
(b) Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$.

6. Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on note $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

(b) Déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A)$.

7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est une densité de probabilité.

(c) Compléter les lignes 4 et 5 du script **Python** ci-dessous pour que la fonction **Python** g prenne en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 def g(x):
4     if x.any() >= 1 : return .....
5     else: .....
6 x=np.linspace(-4,8,100)
7 plt.plot(x,g(x));plt.show()
```

(d) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 6 et 7 du script précédent ?

8. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction g .

(a) Montrer que la fonction de répartition G de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Calculer les probabilités $P([X > e^2])$ et $P_{[X > e]}([X > e^2])$.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

EXERCICE 3

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE A

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale à la durée de fonctionnement d'un composant électronique jusqu'à sa première panne éventuelle.

Pour tout entier naturel n , on note : $u_n = P([X > n])$.

On suppose dans toute cette partie que, pour tout entier naturel n : $u_n \neq 0$.

Le composant est mis en service à l'instant 0. On a ainsi $u_0 = 1$.

1. (a) Soit n un entier naturel non nul. Justifier l'égalité d'événements :

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

- (b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n-1} - u_n = P([X = n]).$$

2. On suppose que la probabilité que le composant tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$ vaut $\frac{2}{5}$, c'est à dire que :

$$\forall n \geq 1, \quad P_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{5}.$$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$P_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - P_{[X > n-1]}([X = n]).$$

- (b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}$.

- (c) En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de u_n en fonction de n .

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P([X = n]) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

- (b) En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

- (c) Donner l'espérance et la variance de X .

PARTIE B

Un appareil est constitué de deux composants électroniques dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Cet appareil ne fonctionne que si au moins un des deux composants est en état de marche.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à la durée de vie de chacun de ses composants et Z la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil. La durée de vie de l'appareil est donc égale à la plus grande des durées de vie des deux composants.

On suppose que X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

4. (a) On rappelle qu'en **Python**, l'instruction **rd.random()** renvoie un réel choisi au hasard et uniformément dans l'intervalle $[0;1]$.

Recopier et compléter le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction **geom** qui

simule une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

```
import numpy.random as rd
def geom():
    X=....
    while ..... : X=.....
    return X
```

- (b) Recopier et compléter alors le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction **simulZ()** qui simule la variable aléatoire Z .

```
def simulZ():
    X1=geom()
    X2=geom()
    if X1>X2 : Z=....
    else : Z=....
    return Z
```

5. Montrer que pour tout entier n non nul, $P([X_1 \leq n]) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

6. (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$[Z \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n].$$

- (b) En déduire la valeur de $P([Z \leq n])$ pour tout entier naturel n .

- (c) Pour tout entier naturel n non nul, en remarquant que

$$P([Z = n]) = P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1]), \text{ montrer que :}$$

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25} \right)^{n-1}.$$

7. Justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5} \right)^n$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25} \right)^n$ puis vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z \leq n]) = 1.$$

8. (a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{16}{25}$.

Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$nP([Z = n]) = 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]).$$

- (b) En déduire que Z admet une espérance, et que :

$$E(Z) = 2E(X_1) - E(Y).$$

En déduire la valeur de $E(Z)$.

ESCP 2021 Énoncé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) a) Calculer J^2 puis vérifier que $J^3 = 2J$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de J .

c) Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J .

d) On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que J est

diagonalisable.

e) En déduire que $J^2P = PD_1^2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 2) a) Vérifier que $K = J^2 - I$.
 b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $A = aI + bJ + cK$.
 c) En déduire que $A = J^2 + 2J$ puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera telles que $AP = PD_2$.
3. a) On rappelle que dans Python, après import de la librairie numpy sous l'abréviation np, la commande np.linalg.matrix_power() permet de calculer la puissance d'une matrice. Compléter le script suivant pour qu'il calcule et affiche la matrice A^n pour une valeur de l'entier naturel n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
A=np.array([[---],[---],[---]])
B=---
print(B)
```

b) Pour $n = 2$, le script précédent renvoie : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 3$, le script précédent renvoie : $A^3 = \begin{pmatrix} 28 & 40 & 28 \\ 40 & 56 & 40 \\ 28 & 40 & 28 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 5$, donner, sans calculer A^5 , un argument permettant de préciser laquelle des deux matrices B_1 ou B_2 suivantes est renvoyée par ce script :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1312 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1324 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On désigne par λ un réel strictement positif et par p un réel de $]0,1[$.

- 1) On considère une variable aléatoire Z suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
- a) Donner sans calcul la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$.
- b) Donner sans calcul les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.
- c) En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$.

- 2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- a) Utiliser les questions précédentes pour montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et donner sa valeur.
- b) En déduire que f est une densité de probabilité.
- c) On désigne par X une variable aléatoire de densité f . Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
- 3) On note F la fonction de répartition de X .
- a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :
- $$\forall x \geq 0, \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x})$$
- b) En déduire l'expression explicite de $F(x)$ pour tout réel x .

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.
- 2) a) Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x , où f' désigne la fonction dérivée de f .
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
- c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f .
- d) Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$?
- 3) a) Calculer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u}$.
- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$.
- c) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(\mathcal{C})$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

- 4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
 d) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$.

```
import numpy as np
n,u=0,1
while u>0.001:
    u=-----
    n=-----
print(n)
```

- 5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a la relation : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}$.
 b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.

Exercice 4

On rappelle que la probabilité d'un événement B est noté $P(B)$.

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, U_3, \dots$ contenant chacune deux boules blanches.

On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1 .
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2 .
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3 , et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1} , mais avant de procéder au tirage suivant.

On pose $X_0 = 2$.

- 1) a) Montrer que la loi de la variable X_1 est donnée par :

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$

- b) Calculer l'espérance de X_1 .

- 2) Pour tout entier naturel k , on note A_k l'événement : « on pioche deux boules noires dans l'urne U_k ». Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $(X_n = 2)$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

- 3) a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2)$$

- b) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- c) Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n .

- 4) Calculer, pour tout entier naturel n , l'espérance de X_n . Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

ESC 2020 Énoncé

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
b) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A .
En déduire les valeurs propres possibles de A .
c) Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A .
À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
d) Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$.
2. **a)** Exprimer B en fonction de I_2 et A . Exprimer de même D en fonction de I_2 et C .
b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
b) Pour tout entier naturel n , donner les coefficients de D^n .
c) Déduire de **3.a)** et **3.b)** que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.
4. Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le n -ième échange » et B_n l'événement « Béatrice gagne le n -ième échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.

- a)** Donner les valeurs de a_1 et b_1 . Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$.
- b)** On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?

c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que

$$X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n.$$

e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.

f) Dédire de 3.c) que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$.

Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

5. Simulation informatique.

On rappelle que l'instruction `a=rd.binomial(1,p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi si $p = \frac{2}{3}$ l'instruction `a=rd.binomial(1,2/3)` affecte à la

variable `a` la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

a) Recopier et compléter les lignes 5 et 6 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable `a` corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).

b) Recopier et compléter les lignes 3 et 7 afin que la variable `S` calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
1. import numpy.random as rd
2. a=rd.binomial(1,2/3)
3. S=...
4. for i in range(2,21):
5.     if a==1 : a=rd.binomial(.....)
6.     else : a=rd.binomial(.....)
7. S=....
8. print(S)
```

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

1. a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$.

b) Calculer $g(1)$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions 1.b) et 1.c).

e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}$.

b) Dédire de 1.c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question 2.b) ainsi que $f(1)$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.

a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation :

$$x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité $h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

c) On donne : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h .

d) Dédire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α .

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

Exercice 3

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

1. Dans cette question, on suppose que l'on connaît la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\frac{2}{100}$.

L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaîne durant cette période.

- a) Reconnaître la loi de X . On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.
- b) Calculer l'espérance et la variance de X .

La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne peut plus afficher la valeur 0. En revanche il affiche normalement tous les autres nombres y compris 10, 20, etc. Lorsque X est égale à 0 il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X . Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.

- c) On rappelle que l'instruction `rd.binomial(n,p)` simule une loi binomiale de paramètres (n, p) et que l'instruction `rd.randint(1, n+1)` simule une loi uniforme sur $1, n$. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y .

```
1. import numpy.random as rd
2. X=rd.binomial(...)
3. if X==0 : Y=...
4. else : Y=...
5. print(X),print(Y)
```

2. **Dans cette question**, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer. Pour cela on fait tester par la machine n cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la i -ème cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

On note $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- a) Rappeler, pour i compris entre 1 et n , l'espérance et la variance de X_i .
b) Calculer $E(M_n)$.

c) Calculer $V(M_n)$ et montrer que $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

d) Soit $\varepsilon > 0$. On admet que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev que :

$$P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- e) Soit $a \in]0;1[$. Montrer que si $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4na}}$ alors $[M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1-a$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à $[0;1]$ on a : $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.
b) En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
d) En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3 .

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = k \frac{t}{1+t} \text{ si } t \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

2. En utilisant l'un des calculs de la question 1 déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité. Vérifier que pour cette valeur de k la fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que k est la valeur trouvée à la question 2 et que X est une variable aléatoire ayant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

3. a) Calculer $F(x)$ lorsque $x < 0$ et lorsque $x > 1$.

b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F(x) = k(x - \ln(1+x))$.

4. a) En utilisant l'un des calculs de la question 1, justifier que X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}.$$

b) En utilisant l'un des calculs de la question 1, justifier que X admet une variance et calculer $V(X)$. On ne demande pas de simplifier l'expression $V(X)$.

Ecricome 2020 Énoncé

EXERCICE 1

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes du script Python ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n=int(input('Entrer n : '))
u,v=0,1
for k in range(.....):
    w=u
    u=.....
    v=.....
print(u)
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n .

3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{et} \quad t_n = v_n - v_{n+1}.$$

(a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n .

(b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $t_n = (-8)^n$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

(a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$.

(b) Justifier que $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$.

(c) En déduire l'expression v_n en fonction de n , puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - 7X - 8$ est un polynôme annulateur de M .
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I .
3. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0 M + b_0 I$.
 (b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1 M + b_1 I$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n M + b_n I$.

Prouver alors que :

$$M^{n+1} = a_n (7M + 8I) + b_n M.$$

En déduire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n tels que :

$$M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I.$$

- (d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n.$$

où (u_n) est la suite définie dans la **partie A**.

Partie C

Soient X et Y deux variables aléatoires pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y) .
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y . En déduire les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

3. (a) Vérifier que la covariance de X et Y est donnée par :

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}.$$

(b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 2

Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x , n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de f .

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f .

On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1; 1]$.

4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

(b) Montrer que pour tout réel x de $[-1; +\infty[$, on a : $f(x) \leq x$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5. Tracer l'allure de (C_f) et (T) dans un repère orthonormé.

On soignera en particulier la position de (C_f) par rapport à (T) .

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.

4. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leq 1/1000$.

```
def f(x):
    return x/(1+x+x**2)
u=.....
n=.....
while u..... :
    u=.....
    n+=.....
print(.....)
```

Partie C

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la **question 3** de la **partie A**, démontrer par récurrence que :

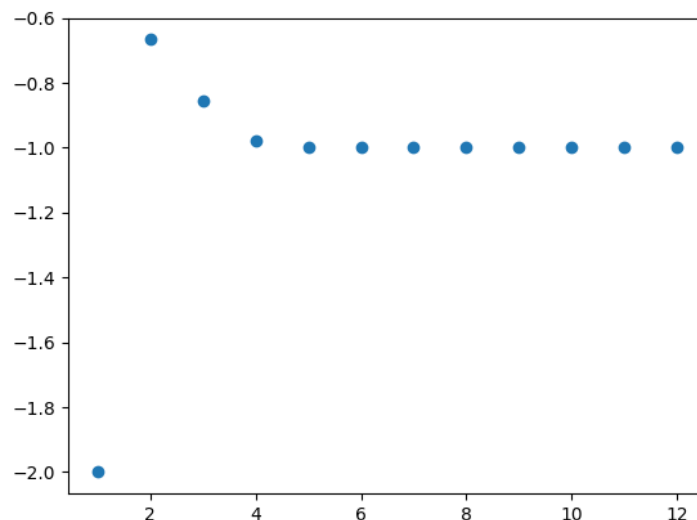
$$\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0.$$

2. En utilisant la **question 4** de la **partie A**, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4. À l'aide de Python, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous.

Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.



5. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x .

(b) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq -1.$$

EXERCICE 3

Un bureau de poste dispose de deux guichets. Trois clients notés A, B, C arrivent en même temps. Les clients A et B se font servir tandis que C attend, puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit les variables aléatoires X, Y, Z égales à la durée en minutes de l'opération des clients A, B et C respectivement lorsqu'ils sont au guichet.

On fixe a et b deux réels strictement positifs, et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre a , et que Y suit une loi exponentielle de paramètre b .

On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition F de X , et donner l'expression d'une densité f de X . Préciser les valeurs de l'espérance et de la variance de X .
2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes du client C avant de parvenir à un des guichets. La variable aléatoire T prend donc la plus petite des valeurs prises par X et Y .

(a) Expliquer pour tout réel x , l'égalité $[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$.

(b) Déterminer la probabilité $P(T > x)$.

(c) En déduire que pour tout réel x :

$$P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Reconnaitre la loi de T préciser son(ses) paramètre(s).

(d) Calculer la probabilité que le client C ait à son arrivée à la poste à attendre plus de 5 minutes avant de parvenir au guichet, sachant qu'il sait qu'il attendra déjà au moins 2 minutes.

3. On rappelle que, pour n un entier naturel non nul, et λ un réel strictement positif, l'instruction `rd.exponential(1/lambda,n)` simule n fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ et stocke les n réalisations ainsi obtenues dans une matrice.

On considère le code Python suivant :

```
import numpy.random as rd
def simul(a,b):
    X=rd.exponential(1/a,10000)
    Y=rd.exponential(1/b,10000)
    T=X
    for k ..... :
        T[k]=.....
    return T
a=float(input('a : '))
b=float(input('b : '))
T=simul(a,b)
```

- (a) Compléter le code de la fonction `simul` pour qu'elle construise une matrice T contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire T .

- (b) On importe la librairie `matplotlib.pyplot` sous le raccourci `plt`.

Laquelle de ces deux instructions est la plus adaptée pour représenter graphiquement la répartition des simulations obtenues pour la variable T par le code Python précédent :

`plt.hist(T)` ou `plt.bar(T,10000)` ?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a=b=\frac{1}{2}$, et on suppose que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle, de paramètre 1, la variable aléatoire Z étant indépendante de X et Y .

On s'intéresse à $V=T+Z$ qui représente le temps total passé par le client C dans la poste, attente et service compris.

4. On s'intéresse à la fonction Python suivante :

```
def simul2():
    T=simul(1/2,1/2)
    Z=rd.exponential(1,10000)
    n=0
    for k in range(10000):
        if T[k]+Z[k]>2 : n+=1
    return n/10000
```

On lance la fonction `simul2` plusieurs fois de suite, et on obtient les résultats suivants :

0,4045 0,4151 0,4221 0,4096 0,4188

(a) Que retourne la fonction `simul2` ?

On pourra utiliser la définition de la variable aléatoire V .

(b) On constate que les résultats renvoyés sont différents mais relativement proches. Sans démonstration, indiquer quel théorème de probabilité assure ce phénomène.

5. On admet que V est encore une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A g(x) dx = 1 - e^{-A} - A e^{-A}.$$

(b) Pour tout réel $A > 0$, calculer la valeur de $\int_0^A x g(x) dx$.

(c) Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

(d) Calculer $P(V \leq 2)$. En déduire la valeur $P(V > 2)$.

On donne : $e^{-2} \simeq 0,14$. En déduire alors une valeur approchée de $P(V > 2)$.

Le résultat vous semble-t-il cohérent avec les résultats Python de la **question 4** ?

(e) Montrer que V admet une espérance et donner sa valeur.

ESCP 2020 Énoncé

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

On rappelle que :

- *la probabilité d'un événement B est notée $P(B)$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(B)$ la probabilité conditionnelle de B sachant C ;*
- *l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z .*

Exercice 1

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I .
 - En déduire que A est inversible, puis exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et de A^2 .
 - Écrire une instruction Python permettant, après import de la librairie numpy sous l'abréviation np, de saisir la matrice A .
 - En utilisant la question 1.b), proposer une instruction Python qui permet de calculer A^{-1} .
 - Donner une instruction Python, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1} .
- On rappelle que, par convention, $A^0 = I$. Justifier que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$, puis compléter le script Python suivant afin qu'il permette de saisir A , puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur numérique de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input('entrer une valeur pour n : '))
I=np.eye(3)
A=.....
B=A.dot(A)
for k in range(n-2):
    C=3*B+(9/4)*I
    I=...
    A=...
    B=...
print(B)
```

3. On admet que la matrice A possède au moins une valeur propre.

a) Montrer que, si λ est une valeur propre de A , alors on a : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}.$$

c) En déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0 , et la placer entre deux entiers consécutifs.

4. On souhaite démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que A n'est pas diagonalisable. On suppose donc que A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

a) Montrer que $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = O$, puis en déduire la matrice D .

b) Conclure.

Exercice 2

On effectue une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir « face » vaut également $\frac{1}{2}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier « pile » et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier « face ».

1. Donner la loi commune à X et Y , ainsi que les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X .

2. Que vaut $P([X=1] \cap [Y=1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.

c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire XY . On précisera $(XY)(\Omega)$.

d) Montrer que l'espérance de XY existe, puis donner sa valeur.

e) Calculer la covariance de X et Y . En déduire que la variance de $X+Y$ est égale à 2.

4. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X+Y$. On précisera $(X+Y)(\Omega)$.

b) Montrer que les variables aléatoires $X+Y$ et $XY+1$ sont de même loi.

5. On décide de coder « pile » par 1 et « face » par 0.

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
import numpy.random as rd
x=...
y=...
lancer=rd.randint(2)
if lancer==1:
    while lancer==1:
        lancer=rd.randint(2)
        y=....
else:
    while lancer==0:
        lancer=rd.randint(2)
        x=....
print(x)
print(y)
```

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1. a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1; x]$, puis montrer que,

$$\text{pour tout } x \text{ de } [1; +\infty[, \text{ on a : } f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}.$$

- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- c) Justifier l'existence, sur $[1; +\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour

$$\text{tout } x \text{ de } [1; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

- d) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1; +\infty[$.

- e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$.

2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad g(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

b) En déduire l'encadrement : $0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$.

c) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

3. a) Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

b) À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

4. a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3; +\infty[$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$.

Exercice 4

Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes des questions 1, 2 et 3.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O . Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n .

On a donc $A_0 = 0$.

On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O .

Voici deux exemples :

- Si les abscisses successives du mobile *après* son départ sont $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 2, A_5 = 0, A_6 = 0$, alors l'événement $(U = 1)$ est réalisé.
- Si les abscisses successives du mobile après son départ sont $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 0, A_5 = 0, A_6 = 1$, alors l'évènement $(U = 4)$ est réalisé.

1. a) Justifier que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \text{ et } P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}.$$

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(U = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables aléatoires A_i .

c) Sans chercher à trouver la loi des variables aléatoires $A_1, \dots, A_k$, déduire des questions précédentes que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(U = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

d) Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1$.

e) En déduire la valeur de $P(U = 0)$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $P(U > n) = \frac{1}{n+1}$.

3. On rappelle que, si j est un entier naturel non nul, l'instruction `rd.randint(1, j+1)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 1 et j .

Compléter les commandes du script Python suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
import numpy.random as rd
k=1
hasard=rd.randint(1,k+2)
while hasard ..... :
    k+=1
    hasard=.....
print('U a pris la valeur : ',k)
```

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

4. a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire T qui admet f pour densité.

- b) Montrer que la fonction de répartition de T et la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

5. On appelle partie entière du réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x .

On a ainsi : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par exemple, si $x = 4,7$, alors $\lfloor x \rfloor = 4$, et si $x = 6$, alors $\lfloor x \rfloor = 6$.

On pose $N = \lfloor T \rfloor + 1$ et on admet que N est une variable aléatoire.

- a) Montrer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, puis justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(N = n) = P(n-1 \leq T < n).$$

- b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- c) Expliquer pourquoi le script Python de la question 3) donne une simulation de N .

6. a) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

- b) La variable aléatoire N possède-t-elle une espérance ?

ESC 2019 Énoncé

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. Application à l'étude de deux suites

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \text{ et } b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$

- a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

i. $a = 2 * a + 3 ** n$

ii. $a = 2 * a + 3 ** (i - 1)$

iii. une autre instruction à préciser

```
1. n=int(input("n?"))
2. a=2
3. for i in range(n):
4.     ...
5. print(a)
```

Pour tout entier naturel n on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

- b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n$.

- c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de a_n , l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=int(input("n?"))
3. A=np.array([....])
4. X=np.array([....])
5. for i in range(n):
6.     X=...
7. print(X[0])
```

- d) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $X_n = A^n X_0$.

- e) En déduire en utilisant 1. Que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$.

3. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .
- b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.
- c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $M^n = P^{-1}A^nP$.

$$\text{En déduire que pour tout entier naturel } n \text{ on a : } M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. Application au calcul d'une somme

- a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.
- b) Pour tout entier naturel n calculer : $\sum_{k=0}^n 3^k$.
- c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.
- d) Déduire des questions précédentes et de 2.e) que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^n k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?
- 2. a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
- 3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
b) Déterminer le sens de variation de f . Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.
c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que pour tout réel x on a : $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Étudier la convexité de f .
5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
6. Pour tout réel x , on pose : $h(x) = \ln(1+e^x)$.
- a) Calculer la dérivée de h .
- b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 3

Dans cet exercice on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.

On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient « pile » on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire, on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On note F l'événement « la pièce amène face ». L'événement « la pièce amène pile » est donc $\overline{F}$. On définit également pour tout entier $k \geq 1$ l'événement R_k : « le k -ème tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».

- On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{3}{4}$.
- On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages *sans remise*. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
 - Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\frac{7}{12}$.
 - On remarque *a posteriori* que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?
- On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages sans remise dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
 - Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\{1; 3\}$.
 - Expliquer pourquoi $(Y=1) = F \cap B_1$. En déduire $P(Y=1)$.
 - Calculer de même $P(Y=2)$.

- d) Dédurre alors des questions précédentes que $P(Y=3)=\frac{7}{12}$.
- e) Calculer $E(Y)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(t) = nt^{n-1} & \text{si } t \in [0;1] \\ f_n(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$.
- b) Montrer que f_n est une densité de probabilité.
2. Soit X_n une variable aléatoire ayant f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n .
- a) Calculer $F_n(x)$ pour tout réel $x < 0$ et tout réel $x > 1$.
- b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F_n(x) = x^n$.
3. Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \frac{n}{n+1}$.

4. Un exemple.

Une cible circulaire de rayon 1 mètre est posée au sol. Deux joueurs 1 et 2 lancent chacun un palet en direction de la cible. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires égales aux distances respectives en mètres entre le centre de la cible et les points d'impact des palets des joueurs 1 et 2. On suppose que U_1 et U_2 suivent des lois uniformes sur $[0;1]$ et qu'elles sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire égale à la plus grande valeur entre U_1 et U_2 et H sa fonction de répartition.

On rappelle l'expression de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = x & \text{si } x \in [0;1] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Justifier que pour tout réel x on a : $P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])$.

En déduire l'expression de $H(x)$ pour tout réel x . Vérifier que Z et X_2 suivent la même loi.

b) Calculer $P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)$ et $P\left(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)$. Vérifier que $P_{\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)}\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}$.

c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche la valeur de Z.

```

1. import numpy.random as rd
2. U1=rd.uniform(0,1)
3. U2=rd.uniform(0,1)
4. if U1>=U2:
5.     ....
6. else:
7.     ....
8. print(Z)
```

5. On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque. On pose $Y_n = -\ln(X_n)$.

On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire à densité. On note G_n sa fonction de répartition.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x})$.

b) Vérifier que si $x < 0$ alors $e^{-x} > 1$. En déduire $G_n(x)$ lorsque $x < 0$.

c) En utilisant **2.b)** calculer $G_n(x)$ lorsque $x \geq 0$. Reconnaitre la loi de Y_n .

d) Donner $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Ecricome 2019 Énoncé

EXERCICE 1

Partie A

Soient A et P les matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les matrices : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que U , V et W sont des vecteurs propres de A et préciser leurs valeurs propres associées.

2. Calculer P^2 . En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
3. (a) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP$.

(c) En déduire que pour tout nombre entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}$$

Partie B

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à n clients, où n est entier naturel non nul.

Chacun des clients choisit exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. L'entreprise réceptionne alors pour chacun de ses n clients son bon de commande et lui livre la formule choisie.

On suppose que les choix de formule des clients sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note :

- A_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, une seule formule a été choisie » ;
- B_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, exactement deux formules sont été choisies ;
- C_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, les trois formules sont été choisies ;

Enfin, on pose pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$: $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, et $c_k = P(C_k)$.

Le tableau ci-dessous donne un exemple de choix de formule pour les cinq premiers bons reçus :

	1 ^{er} bon	2 ^e bon	3 ^e bon	4 ^e bon	5 ^e bon
numéro de la formule choisie	n° 2	n° 1	n° 2	n° 1	n° 3

Dans ce cas, B_2 est réalisé, C_4 n'est pas réalisé, mais C_5 l'est.

1. (a) Préciser les nombres a_1 , b_1 et c_1 .

On ne demande pas de justification dans cette question.

- (b) Justifier les égalités : $a_2 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$.

- (c) Pour tout entier naturel k non nul, donner les valeurs $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$, $P_{C_k}(A_{k+1})$, $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.

2. (a) On considère la matrice M telle que $M = \frac{1}{3}A$, où A est la matrice définie dans la

partie A. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$

3. (a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}.$$

- (b) Déterminer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

(c) On considère le script Python suivant :

```
n=1
c=1-(2**n-1)/3**(n-1)
while c<0.95:
    n=n+1
    c=1-(2**n-1)/3**(n-1)
print(n)
```

Après exécution, on obtient l’affichage suivant :

11.

Interpréter le résultat dans le contexte de l’énoncé.

EXERCICE 2

Soit g la fonction numérique définie sur l’intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
(b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on précisera une équation.
(b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
4. (a) Démontrer que l’équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l’intervalle $]0; +\infty[$.

- (b)** Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de Python afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a; b]$.

```
import numpy as np
def g(x):
    return .....
a=float(input('Entrer la valeur de a : '))
b=float(input('Entrer la valeur de b : '))
while b-a ..... :
    m=.....
    if g(a)*g(m)<=0:b=...
    else:.....
print(...,...)
```

5. Le programme Python ci-dessus affiche 0.88 comme résultat.
 Dans un même repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe (C) et la droite (D) .
6. **(a)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 ((2x-1) - g(x)) dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx,$$

et en déduire que :

$$\int_1^2 ((2x-1) - g(x)) dx = 3\ln(3) - 4\ln(2).$$

- (b)** Interpréter graphiquement le résultat.

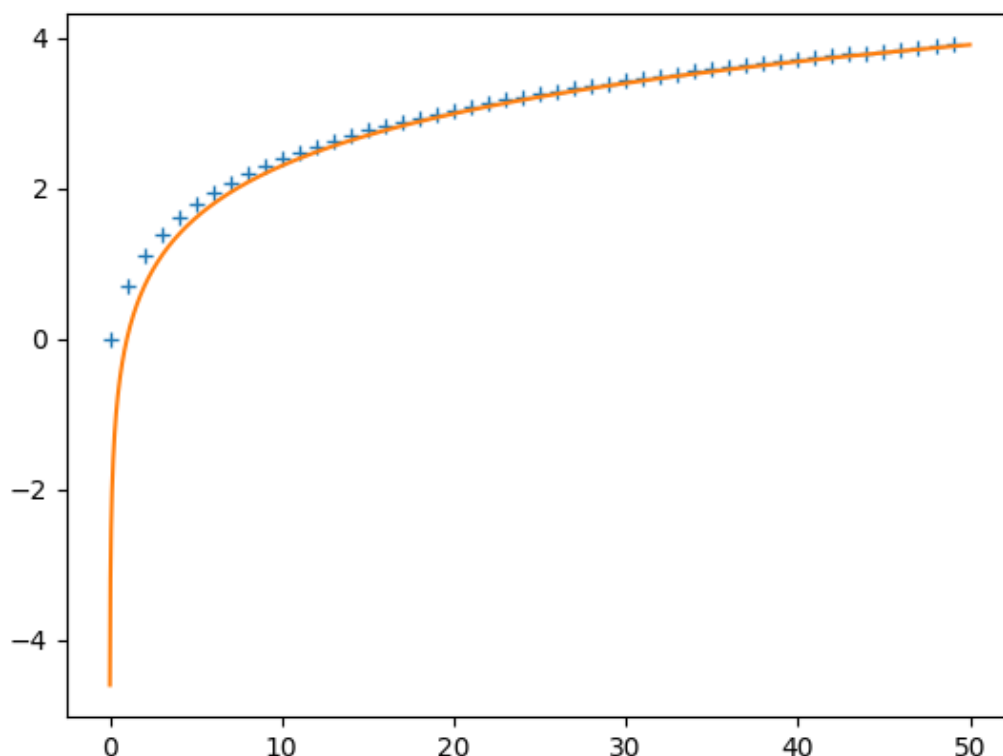
7. **(a)** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = (2n-1) - g(n).$$

Le script Python ci-dessous construit un vecteur ligne u contenant les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
for n in range(1, 50):
    u[n] = (2*n-1) - g(n)
S=np.cumsum(u)
plt.plot(S, 'b+');plt.show()
```

Dans le script, g désigne la fonction g dont le code a été complété à la question **4.(b)**.
 On exécute le script précédent et on obtient le graphique ci-dessous. Sur ce graphique, on a aussi tracé la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $\ln$ en trait plein.



Interpréter le contenu du vecteur ligne S dans le contexte de l'énoncé. En notant pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, que peut-on conjecturer à l'aide du graphique précédent sur la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$?

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ par un calcul rigoureux.

EXERCICE 3

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ e^{a-x} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

1. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = 2$.

On a donc, pour tout réel x : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

- (a)** La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- (b)** La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
- (c)** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- (d)** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement votre résultat.
- (e)** Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On revient à présent et **jusqu'à la fin de l'exercice** au cas général où a est un réel strictement positif.

2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et donner sa valeur.

(b) Montrer que f est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f .

(a) Démontrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

(b) Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_X(x) = \frac{1}{2}$.

(c) Calculer la probabilité $P_{(X \geq a+1)}(X \geq a+2)$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = X - a$.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .

(b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(c) Donner l'espérance et la variance de Y .

En déduire que $E(X) = 1 + a$ et $V(X) = 1$.

5. Soit n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et de même loi que X .

On cherche à estimer le réel a à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)$.

On admettra que $X_1 - 1, X_2 - 1, \dots, X_n - 1$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(a) Montrer que $E(S_n) = a$.

(b) Calculer $V(S_n)$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n)$.

(c) On souhaite simuler une réalisation de la variable aléatoire S_n à l'aide de Python.

L'instruction `rd.exponential(alpha, n)` construit un vecteur ligne contenant n coefficients donnant chacun une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α .

Recopier et compléter le code ci-dessous pour qu'il fournisse une réalisation de la variable aléatoire S_{50} pour une valeur de a entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
a=.....
Y=rd.exponential(...,...)
X=Y+a
S=.....
```

ESCP 2019 Énoncé

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

On rappelle que :

- la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C ;
- l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z .

EXERCICE 1

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}.$$

1. Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{3}{4}$; calculer u_2 et v_2 .
2. Compléter le script *Python* suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
u=.....
v=.....
for k in range(n):
    u=.....
    v=.....
print(u)
print(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

- a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n$.
- b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
- c) (i) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right).$$

- (ii) En déduire à l'aide de la question 3.a) l'expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (iii) Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.
- d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner sa limite.
- e) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$ est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.
- Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.
- b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.
5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) = t_n$.
- a) On pose : $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y .
- b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on note M et I les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer M^2 et montrer que $M^4 = I$.
- b) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} , sans calcul, en fonction de M .
- c) Compléter le script *Python* suivant permettant de saisir M , de calculer $N = M^{-1}$ et d'afficher les deux matrices M et M^{-1} .
- ```
import numpy as np
M=np.array([[.....],[.....],[.....]])
N=.....
print('la matrice M est : ',M)
print('la matrice inverse de M est : ',N)
```
2. a) Montrer que la matrice  $M - I$  est inversible.
- b) Développer le produit matriciel  $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$ , puis utiliser le résultat de la question 2.a) pour déterminer la matrice  $M^3 + M^2 + M + I$ .
- c) Retrouver le résultat de la question 2.b) en calculant directement la matrice  $M^3$ .

3. a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Développer le produit  $(x+1)(x^2+1)$  et à l'aide de la question 2.b), en déduire que  $M$  possède au plus une valeur propre.

b) On pose :  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $MU$  et justifier que  $M$  possède une unique valeur propre dont on précisera la valeur.

4. a) On suppose l'existence de réels  $x, y, z, x', y'$  et  $z'$  vérifiant la relation :

$$xM^2 + yM + zI = x'M^2 + y'M + z'I.$$

Établir les égalités :  $x = x', y = y'$  et  $z = z'$ .

b) On rappelle que par convention, pour toute matrice carrée  $S$ , on a  $S^0 = I$ .

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question précédente que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique triplet de réels  $(a_n, b_n, c_n)$  et on vérifiera les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases}.$$

5. Utiliser les relations trouvées à la question 4.b) pour compléter le script *Python* suivant afin qu'il calcule et affiche  $a_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
a,b,c=0,0,1
for k in range(n):
 u=a
 a=.....
 b=.....
 c=.....
 print(a)
```

### EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on note  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 et  $\bar{A}$  l'événement contraire d'un événement  $A$ .

On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.

L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à  $\frac{4}{5}$  ;

- S'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à  $\frac{2}{5}$ .

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note :

- $B_n$  l'événement : « il fait beau le jour  $n$  » ;
- $\overline{B_n}$  l'événement : « il fait mauvais le jour  $n$  » ;
- $u_n = P(B_n)$  et  $v_n = P(\overline{B_n})$ .

1. a) Donner la valeur de  $u_1$ .

b) Déterminer les probabilités conditionnelles  $P_{B_n}(B_{n+1})$  et  $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$ .

2. a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

b) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

c) Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et interpréter ce résultat.

3. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la matrice à une ligne et deux colonnes suivante :

$$X_n = (u_n \quad v_n).$$

Déterminer la matrice carrée  $K$ , indépendante de  $n$ , qui vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = X_n K.$$

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_1$  et  $K$ .

d) En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice  $K^n$  en fonction de  $n$ .

4. a) Soit  $U_n$  l'événement « il fait beau pendant les  $n$  premiers jours de la période considérée ». Calculer  $P(U_n)$ .

b) Soit  $V_n$  l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des  $n$  premiers jours de la période considérée ». Calculer  $P(V_n)$ .

#### EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \geq 0, g(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

a) On note  $g'$  la dérivée de la fonction  $g$ . Pour tout réel  $t \geq 0$ , calculer  $g'(t)$ .

b) Pour tout  $x \geq 0$ , on pose :  $I(x) = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$ . Déduire de la question précédente la valeur de  $I(x)$ .

c) Calculer  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé, telle que  $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$  et admettant  $f$  comme densité.

2. On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose  $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$  et on note  $G$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y$ .

a) Étudier les variations de la fonction  $Q$  qui, à tout réel  $x \geq 0$ , associe  $Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$  puis déterminer  $Y(\Omega)$ .

b) Pour tout  $y \in [0;1[$ , calculer  $G(y)$  et en déduire que  $Y$  suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0;1[$ .

c) Vérifier que  $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$ , puis compléter à l'aide de la commande `rd.random()`, le script *Python* suivant afin qu'il simule la variable aléatoire  $X$ .

`Y=.....`  
`X=.....`

4. Pour tout réel  $h > 0$ , soit  $T_h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[x, x+h]}([X \leq x+h]).$$

- a) Soit  $x$  un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ .
- b) Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ . Déterminer explicitement  $T(x)$ .
- c) Pour tout réel  $x > 0$ , calculer l'intégrale  $\int_0^x T(t) dt$  et exprimer cette intégrale en fonction de  $F(x)$ .

# ESC 2018 Énoncé

## Exercice 1

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1.
  - a) Calculer  $A^2$ . Vérifier que  $A^2 = A + 6I$ .
  - b) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice  $A$ .
  - c) En déduire que les seules valeurs propres possibles de  $A$  sont  $-2$  et  $3$
2. On considère les matrices  $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Vérifier que  $U$  et  $V$  sont des vecteurs propres de la matrice  $A$  et donner leurs valeurs propres associées.
  - b) Justifier que  $AP = PD$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3.
  - a) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
  - b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $A^n P = P D^n$ .
  - c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \end{pmatrix}$$

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par ses deux premiers termes  $u_0 = -\frac{1}{2}$  et  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ , par la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$$

4. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
5. On considère le programme Python suivant.  
Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 5 pour que ce programme calcule et affiche la valeur de  $u_n$ , l'entier  $n$  non nul étant donné par l'utilisateur ?

```
1. n=int(input('n?'))
2. v,u=-1/2,1
3. for i in range(2,n+1):
4. a=u
5.
6. v=a
7. print(u)
```

On pose  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

6. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $X_{n+1} = AX_n + B$ .
- b) Vérifier que  $AL + B = L$ .
- c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $X_n = A^n(X_0 - L) + L$ .
- d) Dédire des questions précédentes que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

7. On considère le programme suivant. Comment faut-il compléter la ligne 6 pour que ce programme calcule et

affiche la valeur de  $u_n$ ,  
l'entier  $n$  étant donné  
par l'utilisateur ?

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('n?'))
3. X=np.array([[1],[-1/2]])
4. A=np.array([[1,6],[1,0]]);B=np.array([[3],[0]])
5. for i in range(n):
6. X=...
7. print(X[1])
```

## Exercice 2

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x - 1 + x$ .

1. a) Montrer que  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Calculer  $g(0)$ . En déduire, pour tout réel  $x$ , le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm.

2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
- c) Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .
3. a) Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x$ , la relation :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ .
- b) Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites calculées en 2.
4. Montrer que la dérivée seconde de  $f$  vérifie pour tout réel  $x$  la relation :  $f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$ .  
Étudier la convexité de  $f$ .
5. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 3

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches, Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne, Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point. Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : *blanc, rouge, rouge* le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

On introduit, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et 3 les événements  $B_k$  : « obtenir une boule blanche au  $k$ -ième tirage » et  $R_k$  : « obtenir une boule rouge au  $k$ -ième tirage ».

1. Soit  $X_2$  la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est à dire que  $X_2$  est égale à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que  $X_2$  est égal à 0 sinon.

a) Justifier que  $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$ . Calculer  $P(X_2 = 1)$ .

b) Donner  $E(X_2)$  et  $V(X_2)$ .

2. Soit  $X_3$  la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage,

a) Justifier que  $X_3$  suit la même loi que  $X_2$ .

b) Soit  $G$  la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer  $G$  en fonction de  $X_2$  et  $X_3$ . En déduire  $E(G)$ .

3. a) Exprimer l'événement  $(X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)$  en fonction de  $B_1, B_2, B_3$  et  $R_1, R_2, R_3$ .

En déduire que  $P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{2}{9}$ .

b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple  $(X_2, X_3)$ .

| $X_2 \backslash X_3$ | 0    | 1             |
|----------------------|------|---------------|
| 0                    | ...  | ...           |
| 1                    | .... | $\frac{2}{9}$ |

En déduire que  $\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$ .

4. Calculer  $V(G)$ .



5. On suppose à présent que le joueur effectue  $n$  tirages successifs,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il remet toujours la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. Les règles du jeu restent inchangées et on continue à noter  $G$  le nombre total de points marqués lors de ces  $n$  tirages.

a) Expliquer avec précision pourquoi l'instruction :

`X=rd.binomial(1,1/3,n)`

permet de simuler  $n$  tirages dans l'urne.

b) Quelle instruction faut-il ajouter à la ligne 7 pour que le programme suivant simule  $n$  tirages successifs dans l'urne (l'entier  $n \geq 2$  étant donné par l'utilisateur) et qu'il affiche le nombre de points marqués par le joueur ?

On justifiera la réponse.

```
1. import numpy.random as rd
2. n=int(input('n?'))
3. X=rd.binomial(1,1/3,n)
4. G=0
5. for i in range(1,n):
6. if X[i]!=X[i-1]:
7.
8. print(G)
```

## Exercice 4

Dans tout l'exercice  $a$  est un réel strictement positif.

1. Montrer que les intégrales

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt ; J = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \text{ et } K = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$$

sont convergentes et vérifier que  $I = \frac{1}{a}$ ,  $J = \frac{1}{2a^2}$  et  $K = \frac{1}{3a^3}$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < a \text{ et } f(t) = \frac{3a^3}{t^4} \text{ si } t \geq a.$$

2. Montrer en utilisant un des calculs de la question 1 que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un fabricant de téléphone portable veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard chargé au maximum, on note  $X$  le nombre d'heures écoulées lorsque le téléphone s'éteint. On admet que  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f$ .

3. Montrer en utilisant certains calculs de la question 1 que  $X$  admet une espérance et une variance et vérifier que l'on a :  $E(X) = \frac{3a}{2}$  et  $V(X) = \frac{3a^2}{4}$ .

4. On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

a) Calculer  $F(x)$  lorsque  $x < a$ .

b) Justifier que  $F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3$  lorsque  $x \geq a$ .

c) Vérifier que  $P(2a \leq X \leq 4a) = \frac{7}{64}$  et que  $P(X \geq 2a) = \frac{1}{8}$ . Calculer  $P_{(X \geq 2a)}(X \leq 4a)$ .

5. On cherche à estimer le paramètre  $a$ . Pour cela on allume en même temps  $n$  téléphones pris au hasard que l'on a chargés au maximum,  $n$  étant un entier naturel non nul. On note pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $X_i$  la durée en heure écoulée lorsque le  $i$ -ème téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

On pose :  $M_n = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

a) Calculer  $E(M_n)$  et  $V(M_n)$ .

b) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev que :

$$P(|M_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}$$

c) Donner un intervalle dépendant de  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$  et d'un nombre réel  $\alpha$  de  $]0, 1[$  qui contient la moyenne  $E(X)$  avec une probabilité supérieure à  $1 - \alpha$ .

d) En comparant les deux dernières questions, donner une valeur de  $\varepsilon$  en fonction de  $a$ ,  $\alpha$  et  $n$ .

e) Le fabricant teste au hasard 100 téléphones. Il remarque que la somme  $\sum_{i=1}^{100} X_i$  est égale à 603. À quelle valeur peut-il estimer  $a$  ?

# Ecricome 2018 Énoncé

## EXERCICE 1

On considère les trois matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $V_1, V_2, V_3$  sont des vecteurs propres de la matrice  $M$ , et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire une matrice  $P$  telle que  $MP = PD$ .

3. (a) Vérifier que  $X^3 + X^2 + 1$  est un polynôme annulateur de  $P$ .

(b) En déduire que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .

4. Soit  $X$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On pose  $Y = P^{-1}XP$ .

(a) Vérifier que :  $Y^2 = P^{-1}X^2P$ .

(b) Montrer que  $X$  vérifie l'équation

$$(*) : X^2 - 4X + I = M$$

si et seulement si  $Y$  vérifie

$$(**) : Y^2 - 4Y + I = D.$$

5. (a) Déterminer la matrice  $Y$  diagonale vérifiant l'équation  $(**)$  et dont les coefficients diagonaux sont tous inférieurs à 2.

(b) En déduire une matrice  $X$  solution de l'équation  $(*)$ .

On explicitera les neuf coefficients de la matrice  $X$ .

## EXERCICE 2

### Partie I.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de  $g$ , et vérifier que  $g$  admet un minimum sur  $]0; +\infty[$  égal à  $2(1 - \ln(2))$ .
2. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de  $f$  en 0.  
Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = \frac{x}{4}$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ .
6. Étudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  et de  $(\mathcal{D})$ .

On montrera en particulier que  $(\mathcal{D})$  coupe  $(\mathcal{C})$  en un point  $A$  dont on calculera les coordonnées.

7. Étudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
8. (a) Vérifier que pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :  $f''(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$ .

(b) Étudier la convexité de  $f$ . La courbe  $(\mathcal{C})$  possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{e} \approx 0,4, \quad \sqrt{e} \approx 1,6, \quad f(\sqrt{e}) \approx 1,3, \quad f'(\sqrt{e}) \approx 0,1.$$

Représenter la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(\mathcal{D})$  dans un même repère orthonormé.

## Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$u(x) = (\ln(x))^2.$$

2. En déduire que  $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 11}{8}$ .

3. Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{8}{e^2 + 11} f(x) & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

4. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $h$  comme densité.

(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \ln(x) dx = 1.$$

(b) Montrer enfin que  $X$  admet une espérance et la déterminer.

## EXERCICE 3

On considère une urne  $U$  contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne  $V$  contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne  $U$  ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

### Partie I – Étude de l'urne du $n$ -ième tirage

Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $U_n$  l'événement « le  $n$ -ième tirage s'effectue dans l'urne  $U$  ».

Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne  $U$ , l'événement  $U_1$  est certain :  $P(U_1) = 1$ .

1. Calculer  $P(U_2)$ .
2. Donner les valeurs de  $P_{U_2}(U_3)$  et de  $P_{\bar{U}_2}(U_3)$ .

En déduire  $P(U_3)$ .

3. (a) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, que valent  $P_{U_n}(U_{n+1})$  et  $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$  ?

(b) En déduire que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} P(U_n).$$

(c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \alpha.$$

(d) Déterminer alors la valeur de  $P(U_n)$  en fonction de  $n$ .

(e) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n)$ .

## Partie II – Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des  $n$  premiers tirages.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .

2. (a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2=0), P_{[X_1=0]}(X_2=1), P_{[X_1=1]}(X_2=1) \text{ et } P_{[X_1=1]}(X_2=2).$$

(b) En déduire la loi de  $X_2$ .

(c) Vérifier que  $E(X_2) = \frac{19}{18}$ .

3. On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.randint(1, k+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et  $k$ . Recopier et compléter les lignes à pointillés du script Python ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire  $X_2$  :

```
import numpy.random as rd
def simulationX2():
 tirage1=rd.randint(1,4)
 if tirage1<3:
 res1=1
 tirage2=rd.randint(1,5)
 if tirage2==1:res2=1
 else:res2=0
 else:
 res1=0
 tirage2=.....
 if tirage2<3:res2=...
 else:res2=...
 return res1+res2
```

4. Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , déterminer  $X_n(\Omega)$ .

Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , calculer  $P(X_n = 0)$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des  $n$  premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la  $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans  $U$ .

*On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des  $n$  premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la  $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans  $V$ .*

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \quad (R_1).$$

7. Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$ .

Déduire du résultat  $(R_1)$ , que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la valeur de  $P(X_n = 1)$  en fonction de  $n$ .

(c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1)$ .

# ESCP 2018 Énoncé

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants*

*Dans les exercices 3 et 4 :*

- *la probabilité d'un élément  $J$  est notée  $P(J)$ . Si  $C$  est un événement de probabilité non nulle, on note  $P_C(J)$  la probabilité conditionnelle de  $J$  sachant  $C$  ;*
- *on note  $\Omega$  l'univers des résultats observables et si  $T$  est une variable aléatoire, on note  $T(\Omega)$  l'ensemble des valeurs prises par  $T$  ;*
- *sous réserve d'existence, on note respectivement  $E(T)$  et  $V(T)$  l'espérance et la variance de  $T$ .*

## EXERCICE 1

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels et  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices carrées  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  d'ordre 2 qui vérifient les deux conditions :  $a + d = 0$  et  $ad - bc = 0$ .

- a)** Les matrices de  $\mathcal{E}$  sont-elles inversibles ?
- b)** Vérifier que les deux matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ .
- c)** En déduire que la somme et le produit de deux matrices de  $\mathcal{E}$  n'appartiennent pas nécessairement à  $\mathcal{E}$ .
- d)** Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{E}$ .

Déterminer la matrice  $M^2$  et en déduire pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $M^n$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  et on note  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice identité d'ordre 2.

- a)** Justifier l'inversibilité de la matrice  $A$ .
- b)** On pose :  $K = A - 3I$ . Vérifier que la matrice  $K$  appartient à  $\mathcal{E}$ .
- c)** On rappelle que si  $B$  est une matrice carrée d'ordre 2, on pose par convention  $B^0 = I$ .
  - (i)** Exprimer pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$ ,  $I$  et  $K$ .
  - (ii)** Donner l'expression de  $A^n$  sous forme d'un tableau matriciel.



3. a) Établir l'existence d'un unique couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  que l'on déterminera, pour lequel  $A^2 + \alpha A + \beta I$  est la matrice nulle.
- b) Retrouver le fait que la matrice  $A$  est inversible et montrer que  $A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$ .
- c) En déduire que  $A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$  et vérifier que la formule trouvée à la question 2.c) (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est encore valide pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
4. a) Montrer que la seule valeur propre possible  $\lambda$  de  $A$  est  $\lambda = 3$ .
- b) Vérifier que le réel 3 est effectivement valeur propre de  $A$  ; déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre.

## EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on pose :  $I_0 = \int_1^e t \, dt$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_1^e t (\ln t)^n \, dt$ .

1. a) Calculer  $I_0$ .
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $I_n \geq 0$ .
- c) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante puis qu'elle est convergente.
2. a) Pour tout entier naturel  $n$ , soit  $f_n$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1, e]$  par :
- $$\forall t \in [1, e], f_n(t) = (\ln t)^{n+1}.$$
- On note  $f'_n$  la dérivée de la fonction  $f_n$ . Pour tout  $t \in [1, e]$  calculer  $f'_n(t)$ .
- b) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation (\*) suivante :
- $$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \quad (*)$$
- c) En déduire la valeur de  $I_1$ .
- d) En utilisant la relation (\*) et la décroissance de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ , établir pour tout entier naturel  $n$ , l'encadrement suivant :
- $$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$
- e) En déduire les limites respectives des deux suites  $(I_n)_{n \geq 0}$  et  $(nI_n)_{n \geq 0}$ .

- f) Utiliser la relation (\*) pour compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche  $I_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
I=.....
for k in range(1,n+1):
 I=.....
print(I)
```

3. a) Établir pour tout entier naturel  $n$ , l'encadrement :

$$\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

- b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $w_n = n(e^2 - nI_n)$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3e^2$ .

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

### EXERCICE 3

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $X_n$  (respectivement  $Y_n$ ) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la  $n$ -ième expérience, c'est-à-dire après les tirages d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire. Pour tout entier  $k \geq 1$ , on note  $R_k$  (respectivement  $B_k$ ) l'événement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du  $k$ -ième tirage ».

1. a) Justifier que  $X_1(\Omega) = 1; 2$ . Donner la loi de  $X_1$ . Calculer  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .
- b) Exprimer les événements  $[X_2 = 1]$ ,  $[X_2 = 2]$  et  $[X_2 = 3]$  en fonction des événements,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
- c) Montrer que  $X_2$  suit la loi discrète uniforme sur  $1; 3$ . En déduire  $E(X_2)$  et  $V(X_2)$ .

2. a) Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple  $(X_1, X_2)$ .  
 b) Calculer la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ . Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?
3. a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , exprimer l'événement  $[X_n = 1]$  en fonction des événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .  
 b) Montrer que  $P([X_n = 1]) = \frac{1}{n+1}$ . De même, calculer  $P([X_n = n+1])$ .
4. a) Établir pour tout entier  $k \in 2; n+1$ , les égalités suivantes :
- $$P_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } P_{[X_n = k]}([X_{n+1} = k]) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$
- b) En déduire pour tout  $k \in 2; n+1$ , une relation entre  $P([X_{n+1} = k])$ ,  $P([X_n = k])$  et  $P([X_n = k-1])$ .  
 c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $X_n$  suit la loi discrète uniforme sur  $1; n+1$ .
5. Compléter le programme Python suivant afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire  $X_n$  où l'entier  $n$  est entré au clavier.

```
import numpy.random as rd
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
r,b=1,1
for k in range(n):
 if rd.random()<r/(r+b) :
 else :
x=.....
print(x)
```

6. a) Justifier que les variables aléatoires  $X_n$  et  $Y_n$  sont de même loi.  
 b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , que vaut  $X_n + Y_n$  ?  
 c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  de  $X_n$  et  $Y_n$  ?

#### EXERCICE 4

Dans tout l'exercice,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

1. Soit  $Z$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  dont une densité  $g$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Rappeler les valeurs respectives de  $E(Z)$  et  $V(Z)$  ; en déduire la valeur de  $E(Z^2)$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x g(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- a) Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on note  $U$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

- b) Montrer que la variable aléatoire  $U$  admet une espérance dont on donnera la valeur.

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel  $A > 0$ , on a :

$$\int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx = -\frac{A^3}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{3}{\lambda} \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

- b) En déduire l'égalité  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx = \frac{6}{\lambda^4}$  ainsi que l'existence de la variance de  $U$ .

- c) Calculer  $V(U)$ .

4. On note  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $U$ . On rappelle que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- a) Établir la relation :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

- b) Justifier l'égalité :  $P(|U - E(U)| \leq E(U)) = P\left(0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda}\right).$

- c) Sachant que  $e^4 \approx 54,6$ , établir l'inégalité :  $P(|U - E(U)| \leq E(U)) > 0,9.$

5. On suppose dans cette question que le paramètre  $\lambda$  est inconnu.

On pose  $a = \frac{1}{\lambda}$  et on veut estimer ponctuellement le paramètre inconnu  $a$ .

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que  $U$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $\overline{U}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k$ .

**a)** Construire à partir de  $\overline{U}_n$  une variable aléatoire  $W_n$  telles que  $E(W_n) = a$ .

**b)** Calculer  $V(W_n)$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(W_n)$ .

**c)** En déduire que l'on a :  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|W_n - a| \geq \varepsilon) = 0$ .

# ESC 2017 Énoncé

## Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $P^3$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse.
2. Vérifier que  $P^{-1}AP = L$ .
3. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $P^{-1}A^nP = L^n$ .  
b) Soit  $J = L - I$ . Calculer  $J^2$  puis  $J^3$ .  
c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  on a :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

- d) En déduire, pour  $n \geq 2$ , les neuf coefficients de  $L^n$ . Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque  $n = 0$  et lorsque  $n = 1$ .
- e) Déduire des questions précédentes que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On considère les trois suites  $(u_n)_{n \geq 1}$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  définies par  $u_1 = 1$ ,  $v_1 = 0$  et  $w_1 = 2$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$u_{n+1} = u_n; v_{n+1} = v_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- a) Que pouvez-vous dire de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  ? Donner  $u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

- b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Montrer que  $X_{n+1} = AX_n$ .

- c) Établir pour tout entier  $n \geq 1$  que :  $X_n = A^{n-1}X_1$ .

- d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :  $v_n = 2n(n-1)$  et  $w_n = 2n$ .

5. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites

$(u_n)_{n \geq 1}$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

a) Compléter la ligne 2 afin que soit mémorisée dans la variable A la matrice A.

b) Pour mémoriser les termes successifs de la suite

$(v_n)_{n \geq 1}$  de  $v_2$  à  $v_{10}$ , quelle instruction parmi

celles-ci faut-il ajouter en ligne 11 ?

(On justifiera la réponse).

A.  $v[i] = X[i]$  B.  $v[i] = X$  C.  $v[i] = X[1]$

D. une autre instruction à préciser

c) Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 12 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

```
1. import numpy as np
2. A=...
3. u=np.zeros(10)
4. v=np.zeros(10)
5. w=np.zeros(10)
6. u[0]=1;v[0]=0;w[0]=2
7. X=np.array([[1],[0],[2]])
8. for i in range (1,10):
9. X=np.dot(A,X)
10. u[i]=1
11.
12.
```

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = e^x - \ln(x)$  et la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = xe^x - 1$ .

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

b) Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ . En déduire le tableau des variations de  $g$ .

On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en  $+\infty$ .

c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; +\infty[$ .

Vérifier que  $\alpha \in [0; 1]$ .

d) Préciser le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2. a) Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x$  strictement positif :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

En déduire le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

c) Justifier que le réel  $\alpha$  vérifie  $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$ . En déduire que  $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ .

3. a) Montrer que la dérivée seconde de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

b) Étudier la convexité de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

4. Tracer la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité

2 cm. On donne  $\alpha \simeq 0,57$  et  $f(\alpha) \simeq 2,33$ .

### Exercice 3

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à l'écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau  $A$ . Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau  $B$  et enfin le troisième niveau qui est le sommet  $C$ .

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instant. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau  $A$  puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant  $n$  donné l'enfant est sur le niveau  $A$  alors à l'instant suivant  $n+1$  il y reste avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et passe au niveau  $B$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- si à un instant  $n$  donné l'enfant est sur le niveau  $B$  alors à l'instant suivant  $n+1$  il y reste avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et il atteint le sommet  $C$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- si à un instant donné l'enfant est au sommet  $C$  alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n$  l'événement : « l'enfant se trouve sur le niveau  $A$  à l'instant  $n$  »,  $B_n$  l'événement « l'enfant se trouve sur le niveau  $B$  à l'instant  $n$  ». On note enfin  $C_n$  l'événement : « à l'instant  $n$  l'enfant est au sommet ». On note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n ; b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $a_n = \frac{1}{3^n}$ .

4. Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $v_n = 3^n b_n$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison 2.

b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Établir, pour tout entier naturel  $n$ , que :  $b_n = \frac{2n}{3^n}$ .

5. Pour tout entier naturel  $n$ , quelle est la valeur de  $a_n + b_n + c_n$  ? En déduire une expression de  $c_n$  en fonction de l'entier  $n$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ . Comment interpréter le résultat ?

6. On note  $X$  la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

b) Justifier que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on a :  $(X = n) = B_{n-1} \cap C_n$ .

c) En déduire, pour  $n \geq 2$ , que :  $P(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$ .



7. a) On note  $X_1$  la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau  $A$  pour arriver sur le niveau  $B$ .  
Justifier que  $X_1$  suit une loi usuelle. Donner l'ensemble  $X_1(\Omega)$  des valeurs prises par  $X_1$  et donner  $P(X_1 = k)$  pour tout entier  $k$  de  $X_1(\Omega)$ . Calculer  $E(X_1)$ .
- b) On note  $X_2$  la variable aléatoire égale au nombre d'instants supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau  $C$  une fois qu'il a atteint le niveau  $B$ . Justifier que  $X_2$  suit la même loi que  $X_1$ .
- c) Exprimer la variable aléatoire  $X$  en fonction de  $X_1$  et de  $X_2$ . En déduire que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = 3$ .

#### Exercice 4

Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 1 \text{ et } f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \text{ si } t \geq 1.$$

1. a) Soit  $A$  un réel supérieur ou égal à 1. On pose  $I(A) = \int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt$ .

Montrer que  $I(A) = 1 - \frac{1}{A^\alpha}$ .

- b) Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un apiculteur cherche à estimer la durée de vie de ses bougies à la cire d'abeille, c'est-à-dire le temps en heures qu'elles restent allumées en continu avant de s'éteindre. Dans la suite de l'exercice on considère que la durée de vie d'une bougie prise au hasard est une variable aléatoire  $X$  ayant pour densité  $f$ .

2. a) Calculer  $J(A) = \int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha} dt$  pour tout réel  $A \geq 1$ .

- b) En déduire que la variable  $X$  admet une espérance et vérifier que  $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ .

3. Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Calculer  $F(x)$  pour tout réel  $x < 1$ . Montrer que pour  $x \geq 1$  on a :  $F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}$ .

4. Dans cette question, et seulement cette question, on suppose que  $\alpha = 2$ . On donnera les réponses sous forme de fractions simplifiées.
- On prend une bougie au hasard et on l'allume. Quelle est la probabilité que la bougie reste allumée en continu plus de deux heures ? entre deux et trois heures ?
  - On remarque que la bougie est encore allumée au bout de deux heures, quelle est la probabilité qu'elle reste allumée encore une heure ?
5. On pose  $Y = \ln(X)$ . On admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité et on note  $G$  sa fonction de répartition.
- Montrer que pour tout réel  $x$  on a :  $G(x) = F(e^x)$ .
  - En déduire que pour tout réel  $x \geq 0$  on a :  $G(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ . Calculer de même  $G(x)$  pour tout réel  $x < 0$ .
  - Reconnaître la loi de  $Y$ . En déduire son espérance et sa variance.
6. Le paramètre  $\alpha$  de la variable aléatoire  $X$  est pour l'instant inconnu. On cherche à l'estimer. Pour cela, on allume  $n$  bougies au hasard dans des conditions identiques et indépendantes et on mesure les moments où elles s'éteignent. On note  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les durées de vie respectives de chaque bougie. On pose enfin  $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ .
- Calculer  $E(Z_n)$ .
  - Montrer que  $V(Z_n) = \frac{1}{n\alpha^2}$ .
7. On suppose que  $n=100$  et que les valeurs de l'échantillon ont été entrées dans une variable Python `X=[X[1], X[2], ..., X[100]]` (matrice ligne à 100 colonnes). Après import de la librairie `numpy`, l'instruction `np.mean(np.log(X))` amène le résultat `0,33`.
- À combien estimez-vous la valeur de  $\alpha$  ? À combien estimez-vous la durée de vie moyenne d'une bougie ?

# Ecricome 2017 Énoncé

## EXERCICE 1

### Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $PQ$ .

En déduire que  $P$  est inversible et préciser la matrice  $P^{-1}$ .

2. Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  sont trois vecteurs propres de  $M$ , et préciser à quelles valeurs propres ils sont associés.

3. En déduire une matrice diagonale  $D$  (à préciser) telle que  $M = \frac{1}{6}PDQ$ .

4. Établir que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$

5. Justifier que la première colonne de la matrice  $M^n$  est :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

## Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied. Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0. Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel  $n$ ) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour  $n$ , alors il pratiquera au jour  $n+1$  :
  - la natation avec probabilité  $1/5$
  - le cyclisme avec probabilité  $1/5$
  - la course à pied avec probabilité  $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour  $n$ , alors il pratiquera au jour  $n+1$  :
  - la natation avec probabilité  $2/5$
  - le cyclisme avec probabilité  $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour  $n$ , alors il pratiquera au jour  $n+1$  :
  - le cyclisme avec probabilité  $1/5$
  - la course à pied avec probabilité  $4/5$

Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par :

- $A_n$  l'événement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour  $n$  » et par  $a_n$ , la probabilité de  $A_n$ .
- $B_n$  l'événement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour  $n$  » et par  $b_n$  la probabilité de  $B_n$ .
- $C_n$  l'événement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour  $n$  » et par  $c_n$  la probabilité de  $C_n$ .

1. Que valent  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  ?

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Exprimer de même les probabilités  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction des probabilités  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

3. Déterminer alors la matrice  $A$  telle que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

et exprimer  $A$  en fonction de la matrice  $M$  de la **partie I**.

4. Établir que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire alors l'expression de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .

6. Déterminer les limites des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$ .

## EXERCICE 2

### Partie I : tirages dans une urne

Une urne  $\mathcal{U}$  contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans  $\mathcal{U}$ . On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.

(a) Quelle est la loi de  $X$  ?

On précisera  $X(\Omega)$  et  $P(X = k)$  pour tout  $k \in X(\Omega)$ .

(b) Donner la valeur de l'espérance de  $X$  notée  $E(X)$  et vérifier que la variance de  $X$ , notée  $V(X)$  est égale à 75.

2. On procède cette fois ci dans  $\mathcal{U}$  à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(a) Quelle est la loi de  $Y$  ?

On précisera  $Y(\Omega)$  et  $P(Y = k)$  pour tout  $k \in Y(\Omega)$ .

(b) Donner la valeur de  $E(Y)$  et vérifier que  $V(Y) = 12$ .

3. Cette fois ci, on pioche dans l'urne  $\mathcal{U}$  successivement et sans remise les quatre boules. On note  $Z$  le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.

(a) Quelle est la loi de  $Z$  ? On précisera  $Z(\Omega)$  et  $P(Z = k)$  pour tout  $k \in Z(\Omega)$ .

(b) Donner les valeurs de  $E(Z)$  et de  $V(Z)$ .

### Partie II : tirages dans urne choisie au hasard

L'urne  $\mathcal{U}$  contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

L'urne  $\mathcal{V}$  contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans  $\mathcal{U}$ , et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans  $\mathcal{V}$ .

On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut  $T(\Omega)$  ?

2. Donner la loi de  $T$ . On vérifiera que  $P(T=1) = \frac{7}{16}$ .

3. Calculer  $E(T)$ . La variable aléatoire  $T$  suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement  $[T=1]$  est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On rappelle qu'en langage Python l'instruction `rd.randint(n)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre 0 et  $n-1$ . Compléter, sur votre copie, le programme Python suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire  $T$ .

```
import numpy.random as rd
T=.....
if rd.randint(2)==0:
 for k in range (2):
 if rd.randint(4)<1:
 T=T+1
else:

print('Une simulation de T donne : ',T)
```

## EXERCICE 3

### Partie I : étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4 \ln(x)}{x^3}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Résoudre l'inégalité  $f(x) \geq 0$  d'inconnue  $x > 0$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement les résultats.
4. Étudier les variations de  $f$  et préciser les extrema de  $f$ .
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse 1.
6. Tracer dans un repère orthonormé la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1, ainsi que la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

On prendra :  $e^{\frac{1}{3}} \simeq 1,4$  et  $\frac{4}{3e} \simeq 0,5$ .

## Partie II : étude d'une variable à densité

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel  $A$  supérieur, ou égal à 1 :

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Montrer que  $h$  est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite de cet exercice une variable aléatoire  $X$  dont  $h$  est une densité.

(a) Calculer la fonction de répartition,  $F$  de la variable aléatoire  $X$ .

(b) Compléter sur votre copie les lignes 4 et 6 du programme Python suivant pour que la fonction  $F$  prenne en entrée un réel  $x$  et calculer la valeur de  $F(x)$ .

```
1. import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
2. def F(x):
3. if x < 1:
4.
5. else:
6.
7.
8. a = np.array([F(-2+7*i/300) for i in range(301)])
9. plt.plot(a); plt.show()
```

(c) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 8 et 9 du programme précédent ?

4. Montrer que pour tout réel  $A$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A x h(x) dx = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}.$$

En déduire que  $X$  admet une espérance et calculer cette dernière.

5. La variable aléatoire  $X$  admet-elle une variance ?

6. Montrer que pour tout réel  $A$  strictement supérieur à 1 :

$$P_{[X > A]}(X > 2A) = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)},$$

Puis calculer  $\lim_{A \rightarrow +\infty} (P_{[X > A]}(X > 2A))$ .

# ESCP 2017 Énoncé

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*

## EXERCICE 1

Soient  $M$  et  $I$  les matrices d'ordre 3 définies par :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1.
  - a) Calculer  $M^2$  et  $M^3$  et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que  $M$  n'est pas inversible.
  - b) Pour tout entier  $n \geq 3$ , déterminer  $M^n$ .
  - c) Calculer  $(I - M)(I + M + M^2)$ . En déduire que  $(I - M)$  est inversible et donner son inverse  $(I - M)^{-1}$ .
  - d) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice  $M$ .
  - e) En déduire la seule valeur propre possible de  $M$ .
2. On pose :  $S = M + I$ .
  - a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice  $S^n$  en fonction de  $I$ ,  $M$  et  $M^2$ .
  - b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice  $S^n$ .
3. Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  les trois suites définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}.$$

- a) Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'égalité :  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .
- b) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation :  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ .
- c) Exprimer  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ . Montrer que  $u_n + v_n + w_n = 1$ .



4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice  $J$  d'ordre 3, triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous nuls et une matrice  $P$  d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation :  $J = PMP$ .

a) On pose  $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer les matrices colonnes  $V$  et  $W$ , définies par :  $V = -MU$  et

$$W = M^2U.$$

b) Soit  $P$  la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est  $W$ , la deuxième est  $V$  et la troisième est  $U$ . Calculer  $P^2$  ; en déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse  $P^{-1}$ .

c) Expliciter la matrice  $J = PMP$ .

## EXERCICE 2

Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  deux suites définies par :

$$u_1 = 1, v_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

- Vérifier que  $u_2 = \frac{1}{3}$  et  $v_2 = \frac{4}{3}$ , puis calculer  $u_3$  et  $v_3$ .
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .
- Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont décroissantes et convergentes.
- On pose :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
  - Montrer que la suite  $(u_n - v_n)_{n \geq 1}$  est constante et en déduire une relation entre  $\ell$  et  $\ell'$ .
  - En utilisant la relation  $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$ , montrer que  $\ell \ell' = 0$ .
  - Déterminer  $\ell$  et  $\ell'$ .
- Recopier et compléter les lignes 5. et 6. du programme Python afin qu'il calcule et affiche les valeurs de  $u_n$  et  $v_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

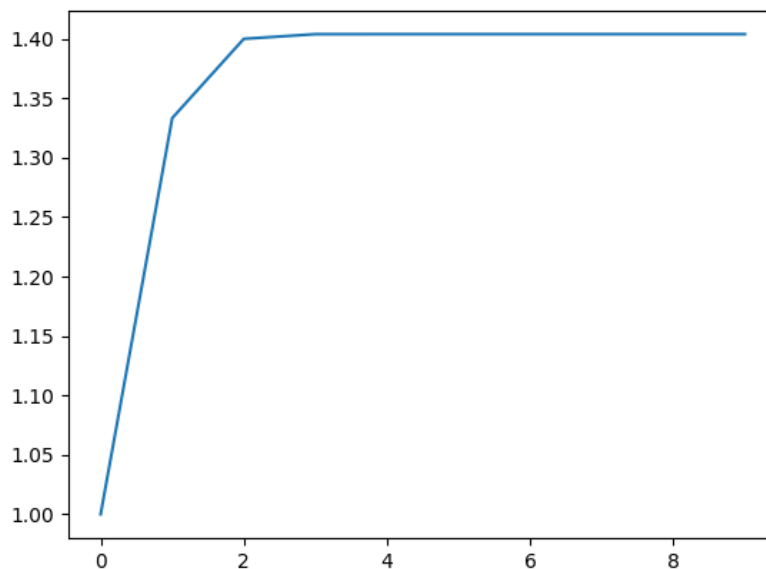
```

1. n=int(input('entrer la valeur de n : '))
2. u,v=1,2
3. for k in range(1,n):
4. a=u
5. u=.....
6. v=.....
7. print(u)
8. print(v)
```

6. On considère le programme précédent avec les instructions supplémentaires :

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. n=int(input('entrer la valeur de n : '))
4. u,v=1,2
5. s=np.ones(n)
6. for k in range(1,n):
7. a=u
8. u=.....
9. v=.....
10. s[k]=u
11. print(u)
12. print(v)
13. x=np.arange(n)
14. y=np.cumsum(s)
15. plt.plot(x,y);plt.show()
```

- a) Que contiennent les variables  $s$  et  $y$  à l'issue du programme ?  
b) Ce programme fournit la sortie graphique suivante pour la valeur  $n = 10$ .



Quel résultat ce graphique permet-il de conjecturer ?

### EXERCICE 3

La probabilité d'un événement  $A$  est notée  $P(A)$  et sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $U$  sont notées respectivement  $E(U)$  et  $V(U)$ .

Soit  $a$  un réel vérifiant  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.

*Dans la suite de l'exercice, on note  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité et on suppose que le paramètre  $a$  est inconnu.*

2. Calculer  $E(X)$  et montrer que  $V(X) = \frac{4-3a^2}{12}$ .

3. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de la variable aléatoire  $X$ .

4. Pour  $n$  entier de  $\mathbb{N}^*$ , on considère  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes et suivant toutes la même loi que  $X$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

a) Montrer que la variable aléatoire  $Y_n = \overline{X}_n$  a pour espérance  $a$ .

b) Calculer la variance de  $Y_n$ .

c) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev à  $Y_n$ , établir l'inégalité :

$$P(|Y_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}.$$

5. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la variables aléatoires  $Z_n$  et  $T_n$  par :

- $Z_n$  est le nombre de variables aléatoires parmi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  qui prennent des valeurs inférieures ou égales à  $\frac{1}{2}$  ;
- $T_n$  est le nombre de variables aléatoires parmi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  qui prennent des valeurs strictement supérieures à  $\frac{1}{2}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $W_n = 1 + \frac{2}{n}(T_n - Z_n)$ .

- a) Justifier que  $Z_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$  et que  $T_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$ .
- b) Vérifier que  $E(W_n) = a$ .
- c) Que vaut  $T_n + Z_n$  ? En utilisant la valeur de  $V(T_n + Z_n)$ , calculer  $\text{Cov}(T_n, Z_n)$ .
- d) En déduire la valeur de  $V(W_n)$ . Quelle est la limite de  $V(W_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

## EXERCICE 4

On pose  $I_0 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$ .

1. a) Établir pour tout  $x \in [0;1]$ , l'encadrement :  $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$ .  
 b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
 c) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0;1]$  par :  $\forall x \in [0;1], f(x) = e^{-x^2}$ .  
 On note  $f'$  la dérivée de  $f$ .  
 a) Pour tout  $x \in [0;1]$ , calculer  $f'(x)$ .  
 b) En déduire que  $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$ .
3. a) En utilisant l'identité  $x^{n+2} e^{-x^2} = x^{n+1} \times x e^{-x^2}$  et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$ .  
 b) Déterminer la limite de  $n I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$ .

a) Établir la relation  $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}$ .

En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

b) Donner sous forme de somme, l'expression de  $I_{2n+1}$  en fonction de  $n$ .

c) Vérifier que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :  $I_{2k+1} = k I_{2k-1} - \frac{1}{2e}$ . À l'aide de cette relation

et de la valeur de  $I_1$ , compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de  $I_{2n+1}$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('entrer la valeur de n : '))
3. I=1/2-1/(2*np.e)
4. for k in range(1,n+1):
5. I=.....
6. print(I)
```

# ESC 2016 Énoncé

## Exercice 1

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. a) Calculer  $A^3$ . Vérifier que  $A^3 = 4A$ .

b) En déduire que les valeurs propres que  $A$  peut avoir sont : 0, 2 et -2.

c) On considère les matrices colonnes  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont vecteurs propres de  $A$ . Quelles sont leurs valeurs propres associées ?

d) Justifier, en utilisant les questions précédentes, que  $AP = PD$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. a) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $A^n P = P D^n$ .

c) Donner  $D^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

3. On considère les trois suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par leurs premiers termes  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$  et  $c_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + 2b_n \end{cases}$$

On pose  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} = AU_n$ .

**b)** Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de

$a_{10}$  :

```
1. import ... as np
2. A = . . .
3. U = np.array([[0], [1], [2]])
4. for i in range (10):
5. U = A.dot(U)
6. print(...)
```

**c)** Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_n = A^n U_0$ .

**d)** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les relations :  $a_n = -2^n$ ,  $b_n = 0$  et  $c_n = 2^n$ .

## Exercice 2

On considère la fonction définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par :  $\forall x \in ] -2 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \ln(x+2) - x$ .

On nomme  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

### Partie I - Étude de la fonction $f$

1. **a)** Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-2$  par valeur supérieure. Comment interpréter graphiquement le résultat ?

**b)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. Calculer la dérivée de  $f$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $] -2 ; +\infty[$  en y faisant figurer les limites calculées en 1.

3. **a)** Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .

**b)** On donne :  $\ln(2) \approx 0,69$  et  $\ln(3) \approx 1,10$ . Justifier que  $\alpha \in ]1; 2[$ .

On admet dans la suite que l'équation  $f(x) = 0$  admet une autre solution  $\beta$  entre  $-2$  et  $-1$ .

4. Calculer la dérivée seconde de  $f$ . Montrer que  $f$  est concave sur  $] -2 ; +\infty[$ .

5. On donne  $\alpha \approx 1,15$  et  $\beta \approx -1,8$ . Tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}$ .

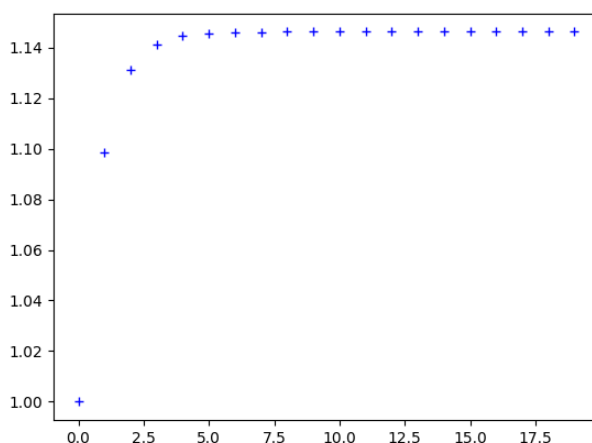
## Partie II - Valeur approchée de $\alpha$

Dans cette partie on cherche à justifier que  $\alpha \approx 1,15$ . On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1;2]$  par  $g(x) = \ln(x+2)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. a) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs de  $u_1$  à  $u_{20}$  et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
1. import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt
2. u=[...]
3. for i in range (19):
4. u=u+[.....]
5. plt.plot(u, 'b+'); plt.show()
```

- b) L'exécution du programme amène le graphique ci-contre. Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et sur sa limite ?



2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $[1;2]$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $1 \leq u_n \leq 2$  (on rappelle que  $\ln(2) \approx 0,69$  et  $\ln(3) \approx 1,10$ ).
- c) Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante. En déduire que cette suite est convergente.
3. a) Montrer que le réel  $\alpha$  de la partie I est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$  sur  $[1;2]$ .
- b) Soit  $l$  la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . En passant à la limite dans la relation  $u_{n+1} = g(u_n)$  montrer que  $l = g(l)$ .
- c) Dédire des questions précédentes que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\alpha$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à l'aide du graphique de la question 1.



### Exercice 3

Soit  $N$  le nombre total de loups présents sur l'ensemble du massif alpin. On ne connaît pas la valeur de  $N$  et on cherche à l'estimer. Pour cela, on prélève 10 loups au hasard dans le massif, on leur pose à chacun une puce électronique puis on les relâche. Un mois plus tard, on reprend les prélèvements dans la population de loups selon deux protocoles différents. On suppose que dans l'intervalle la population de loups n'a pas changé c'est à dire qu'il n'y a eu ni décès ni naissance. On suppose également que chaque loup (pucé ou non) est prélevé de manière équiprobable.

La probabilité de prélever un loup pucé est donc  $\frac{10}{N}$ .

#### 1. Premier protocole

On prélève 30 loups au hasard et *avec remise* c'est à dire que chaque loup prélevé est relâché dans la nature entre deux prélèvements et peut donc être prélevé plusieurs fois.

Soit  $X$  le nombre de loups pucés que l'on prélève.

- Reconnaître la loi de  $X$ . Donner  $X(\Omega)$  ensemble des valeurs prises par  $X$ . Donner une expression de  $P(X = k)$  pour tout entier  $k$  de  $X(\Omega)$ .
- Donner, en fonction de  $N$ , l'espérance et la variance de  $X$ .
- Démontrer que  $E\left(\frac{X}{300}\right) = \frac{1}{N}$  puis calculer  $V\left(\frac{X}{300}\right)$ .

#### 2. Second protocole

On prélève au hasard et avec remise des loups dans le massif jusqu'à en trouver un qui soit pucé. On nomme  $Y_1$  le nombre de loups prélevés lorsque l'on trouve le premier loup pucé.

- Reconnaître la loi de  $Y_1$  décrire  $Y_1(\Omega)$  et donner une expression de  $P(Y_1 = k)$  pour tout entier  $k \in Y_1(\Omega)$ .
- Donner, en fonction de  $N$ , l'espérance de  $Y_1$ .

On continue les prélèvements avec remise jusqu'à obtenir pour la première fois 3 loups pucés. On note  $Y_2$  le nombre de loups prélevés entre l'apparition du premier loup pucé et celle du deuxième et  $Y_3$  le nombre de loups prélevés entre l'apparition du deuxième loup pucé et celle du troisième.

- Expliquer pourquoi  $Y_2$  et  $Y_3$  suivent la même loi que  $Y_1$ .
- Soit  $Y$  le nombre total de loups prélevés lorsque l'on prélève le troisième loup pucé. Exprimer  $Y$  en fonction de  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$ . En déduire  $E(Y)$ .
- Justifier que  $E\left(\frac{10Y}{3}\right) = N$ .
- L'expérience est effectuée et l'on prélève exactement 33 loups avant d'obtenir le troisième loup pucé. À quelle valeur estimez-vous  $N$  ?

#### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = 0$  si  $t < 1$  et  $f(t) = \frac{2}{t^3}$  si  $t \geq 1$ .

1. a) On pose  $A \geq 1$  :  $I(A) = \int_1^A \frac{2}{t^3} dt$ . Montrer que  $I(A) = 1 - \frac{1}{A^2}$ .

b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Dans une station-service, si une pompe à essence est libre on appelle « durée de distribution » le temps en minutes nécessaire à un automobiliste pour se garer, faire le plein, payer et repartir. On suppose que la variable aléatoire  $X$  égale à la durée de distribution est de densité  $f$ .

2. Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Calculer  $F(x)$  pour  $x < 1$ . Montrer que si  $x \geq 1$  alors  $F(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .

3. a) Calculer la probabilité que la durée de distribution soit d'au moins 2 minutes, la probabilité qu'elle soit de moins de 3 minutes et enfin la probabilité qu'elle soit comprise entre 2 et 3 minutes.

b) On suppose qu'un client est à la pompe depuis déjà 2 minutes. Quelle est la probabilité qu'il reste encore moins d'une minute ?

4. a) Soit  $A$  un réel supérieur à 1. Calculer :  $J(A) = \int_1^A \frac{2}{t^2} dt$  puis  $\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A)$ .

b) En déduire que  $X$  admet une espérance et donner sa valeur.

On suppose que la station-service dispose de deux pompes identiques. Trois clients arrivent en même temps à la station. Deux d'entre eux commencent à se servir pendant que le troisième client doit attendre que l'un des deux premiers ait terminé.

On note  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux durées respectives de distribution pour le client n° 1 et le client n°2. On admet que les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et qu'elles ont  $f$  pour densité.

On note enfin  $Y$  la variable aléatoire égale au temps que le client n°3 doit attendre avant de pouvoir se servir en carburant. On admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité.

5. Pour tout réel  $x$ , justifier que  $P(Y > x) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x])$  puis en déduire  $P(Y > x)$  en fonction de  $F$ .

6. a) Montrer que la fonction de répartition de  $Y$  est donnée par :

$$G(x) = 0 \text{ si } x < 1 \text{ et } G(x) = 1 - \frac{1}{x^4} \text{ si } x \geq 1.$$

b) Déterminer une densité de  $Y$ .

# Ecricome 2016 Énoncé

## EXERCICE 1

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

On définit également trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  par leurs premiers termes  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$  et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

### 1. Puissances successives de la matrice $A$

(a) Calculer  $(A - I)(A - 2I)(A - 3I)$ . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .

(b) Vérifier que la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-

colonnes qui sont vecteurs propres de  $A$ . Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.

(c) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

(d) Vérifier que la matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  satisfait la relation  $AP = PD$  et en

déduire l'expression de  $A$  en fonction des matrices  $P$ ,  $D$  et  $P^{-1}$ .

(e) Exprimer  $A^n$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(f) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2. Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

(a) Vérifier que l'on a la relation :  $C = AC + B$ .

(b) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n + B$ .

(c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = C - A^n C$ .

(d) En déduire les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

## EXERCICE 2

### Partie I : Étude de fonction

Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x}$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère du plan.

1. Soit  $P$  le polynôme de degré deux, défini pour tout réel  $x$  par  $P(x) = x^2 - 2x - 3$ .  
Déterminer le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. (a) Montrer que  $g'(x) = -xP(x)e^{-x}$  pour tout réel  $x$ .  
(b) Dresser le tableau de variation complet de  $g$ .  
(c) Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Donner une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.
5. Construire  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes horizontales dans un repère orthogonal d'unités : 1 cm sur  $(Ox)$  et 2 cm sur  $(Oy)$ . On prendra  $\frac{32}{e^3} \approx 1,6$ .

### Partie II : Intégrales et probabilités

1. On pose  $I_0 = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  et pour tout entier naturel non nul,  $I_n = \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .  
(a) Montrer que  $I_0$  est une intégrale convergente égale à  $\frac{1}{e}$ .  
(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel  $M \geq 0$  :
$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx$$
  
(c) En raisonnant par récurrence à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'intégrale  $I_n$  converge.  
(d) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,
$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$
  
(e) Calculer  $I_n$  pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ . On admet que  $I_4 = \frac{65}{e}$ ,  $I_5 = \frac{326}{e}$ .  
(f) Écrire un script PYTHON qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif  $n$ , calcule et affiche la valeur de  $I_n$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie par  $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{e}{18} g(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , où  $g$  est la fonction définie dans

la partie I.

(a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera  $Z$ .

(b) Justifier que la variable  $Z$  admet une espérance, puis la calculer.

(c) Justifier que la variable  $Z$  admet une variance, puis vérifier que :

$$V(Z) = \frac{296}{81}$$

### EXERCICE 3

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note  $Y_1$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.

On note  $Y_2$  (respectivement  $Y_3$ ) le nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une deuxième (respectivement une troisième) paire de boules de la même couleur, à partir de l'obtention de la première (respectivement de la deuxième) paire de boules de la même couleur.

On remarquera que  $Y_3$  est une variable aléatoire constante et que  $Y_3 = 1$ .

On admettra que les variables  $Y_1, Y_2, Y_3$  sont indépendantes.

Enfin, on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.

Par exemple, si les résultats successifs sont  $(R_1, B_1), (B_1, J_2), (J_1, J_2), (B_1, R_2), (R_1, B_2), (R_1, R_2), (B_1, B_2)$  alors  $Y_1$  prend la valeur 3,  $Y_2$  prend la valeur 3,  $Y_3$  prend la valeur 1 et  $X$  prend la valeur 7.

#### 1. Loi de $Y_1$

(a) Calculer la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).

(b) Justifier que la variable aléatoire  $Y_1$  suit une loi usuelle. De quel(s) paramètre(s) ?

Vérifier que  $E(Y_1) = 5$ . Que vaut la variance de  $Y_1$  ?

## 2. Loi de $Y_2$

Dans cette question, on suppose que la première paire de boules de la même couleur a été obtenue et retirée de l'urne. Il reste ainsi quatre boules dans l'urne, deux pour chaque couleur restante.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage (de deux boules) ?
- (b) Déterminer la loi de  $Y_2$ . Quelle est son espérance ?

Vérifier que  $V(Y_2) = 6$ .

## 3. Loi de $X$

- (a) Quelle relation lie la variable aléatoire  $X$  aux variables aléatoires  $Y_1, Y_2, Y_3$  ?
- (b) En déduire que  $E(X) = 9$ . Que vaut  $V(X)$  ?
- (c) Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 3. Justifier chaque égalité ci-dessous :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i) P(Y_2 = k - 1 - i)$$

Indication : On remarquera que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

- (d) En déduire que :

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{5} \right)^{k-2} - \left( \frac{2}{3} \right)^{k-2} \right]$$

## 4. Informatique

- (a) Compléter ce script PYTHON afin qu'il calcule et affiche les probabilités  $P(X = k)$  pour  $k \in 3, 22$ .

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(3,23)
u=[..... for k in range (3,23)]
plt.plot(u, '+'); plt.show()
```

Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 1 (page suivante).

Quelle semble être la valeur la plus probable de  $X$  ?

- (b) Quelle instruction peut-on écrire dans l'interpréteur PYTHON pour afficher les vingt valeurs de la fonction de répartition de  $X$  aux points d'abscisses entières comprises entre 3 et 22 ?

Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 2 (page suivante).

Déterminer graphiquement un réel  $m$  tel que  $P(X \leq m) = P(X \geq m)$ .

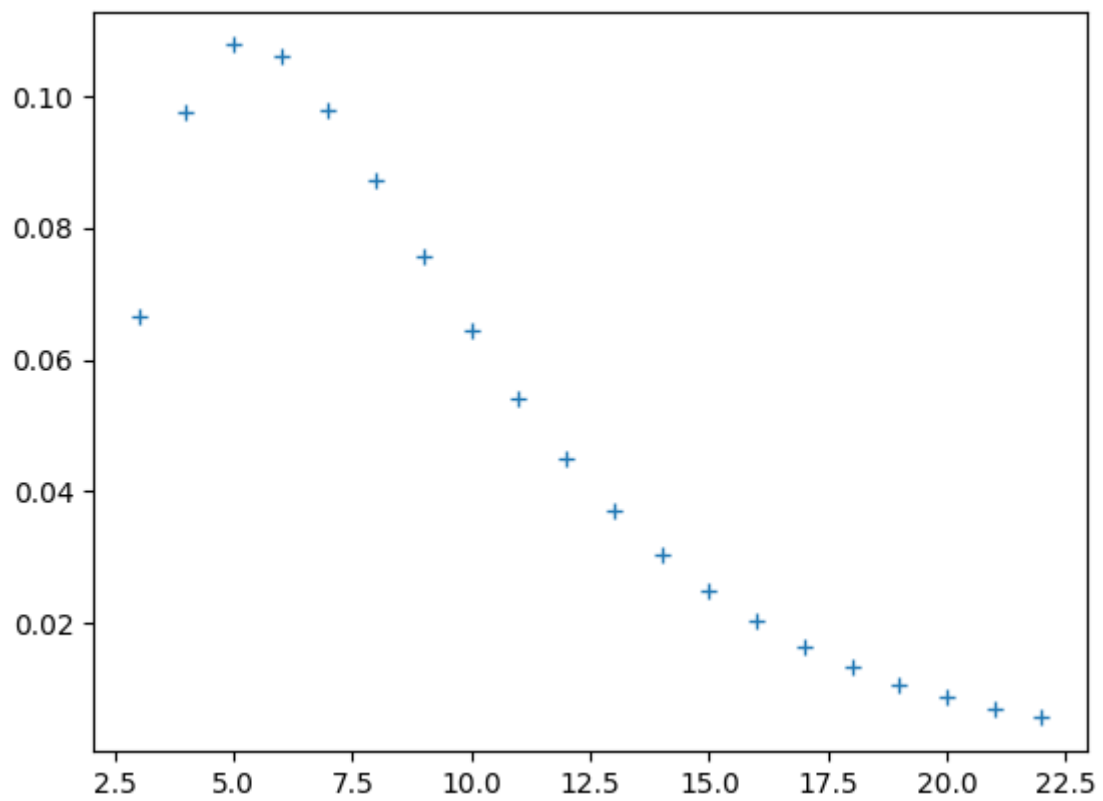


Figure 1

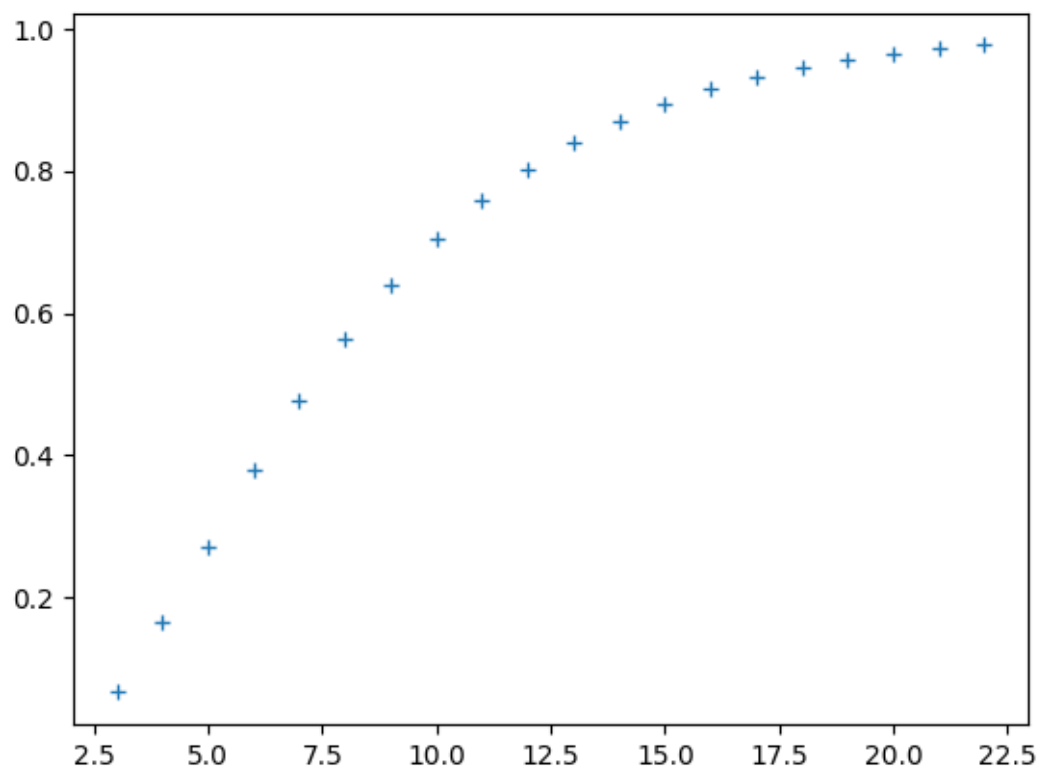


Figure 2

# ESCP 2016 Énoncé

- L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
- La probabilité d'un événement  $G$  est notée  $P(G)$ .
- Sous réserve d'existence, on note  $E(T)$  et  $V(T)$  respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $T$ .

## EXERCICE 1

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 3 définie par :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. On rappelle qu'un polynôme  $R$  est annulateur de la matrice  $A$  si  $R(A) = O$ .

- Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  et  $A^3 - A^2 - 2A$ .
- En déduire un polynôme  $R$  non nul, annulateur de la matrice  $A$ .
- Déterminer les racines du polynôme  $R$ .
- En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .

2. a) Vérifier que les trois vecteurs  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs

propres de matrice  $A$  et donner les valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  associées.

b) On pose :  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer le produit  $PQ$ . En déduire que la matrice  $P$  est inversible et déterminer son inverse  $P^{-1}$ .

- Vérifier la relation  $AP = PD$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. a) Établir par récurrence, pour tout entier  $n \geq 1$ , la relation :  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
- En déduire pour tout entier  $n \geq 1$ , la matrice  $A^n$  sous forme explicite.
4. On note  $I$  la matrice identité d'ordre 3. Soit  $M$  la matrice carrée définie par :  $M = I - 2A + 5A^2$ .
- Montrer que  $A^2P = PD^2$ . En déduire l'égalité :  $MP = P(I - 2D + 5D^2)$ .
  - Déduire de la question 4.a) que  $M$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.



## EXERCICE 2

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$ .

1. Compléter le programme *Python* suivant pour qu'il calcule et affiche  $u_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n = int(input('entrer la valeur de n'))
u = ...
for k in range(n):
 u = ...
print(u)
```

2. Établir pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'encadrement suivant :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
3. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - x.$$

- a) Dresser le tableau de variation de  $f$  puis déterminer le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
- b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.
- c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente.
4. a) Justifier pour tout réel  $x \geq 0$ , l'inégalité :  $\ln(1 + x) \leq x$ .
- b) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , établir l'inégalité :  $u_{n+1} \leq u_n^2$ .
- c) En déduire pour tout entier  $n \geq 1$ , l'inégalité :  $u_n \leq (\ln 2)^n$ .
- d) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
- e) On considère le programme *Python* suivant :

```
import numpy as np
n, u = 0, 1
while u >= 0.0001:
 u = np.log(1 + u**2)
 n += 1
print(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6. Quelle est la signification de ce résultat ?

5. Établir pour tout entier  $n \geq 2$ , l'inégalité :  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$ .

### EXERCICE 3

Dans tout l'exercice,  $a$  désigne un paramètre réel strictement positif.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, telle que : 
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x^2}{a^3} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité.

2. Calculer  $E(X)$ . Montrer que l'on a :  $V(X) = \frac{3a^2}{80}$ .

3. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ . Montrer que l'on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

On suppose désormais que le paramètre  $a$  est inconnu et on souhaite l'estimer à l'aide de deux estimateurs différents. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on considère en effet un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que  $X$ .

4. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose :  $Y_n = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

a) Calculer  $E(Y_n)$ .

b) On note  $V(Y_n)$  la variance de la variable aléatoire  $Y_n$ .

Montrer que l'on a :  $V(Y_n) = \frac{a^2}{15n}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n)$ .

c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0.$$

5. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose :  $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

On admet que pour tout  $x$  réel, on a :  $[Z_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]$ .

a) On note  $H_n$  la fonction de répartition de  $Z_n$ . Montrer que :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{3n} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

- b) En déduire une densité  $h_n$  de la variable aléatoire  $Z_n$ .
- c) Calculer  $E(Z_n)$  puis le nombre  $b(Z_n) = E(Z_n) - a$ .
- d) Calculer le nombre  $r(Z_n) = V(Z_n) + (b(Z_n))^2$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(Z_n)$ .
6. Soit  $\theta$  un réel vérifiant  $0 < \theta < a$ .
- a) Justifier l'égalité d'événements suivante :  $[|Z_n - a| \geq \theta] = [Z_n - a \geq \theta] \cup [Z_n - a \leq -\theta]$ .
- b) En déduire la relation :  $P([|Z_n - a| \geq \theta]) = 1 - H_n(a + \theta) + H_n(a - \theta)$ .
- c) Établir l'égalité :  $P([|Z_n - a| \geq \theta]) = \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([|Z_n - a| \geq \theta])$ .

### EXERCICE 4

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.

À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  ;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  ;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit les variables aléatoires suivantes :

- $X_n$  est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- $Y_n$  est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- $Z_n$  est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- $A_n$  est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son  $n$ -ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire  $A_1$ . Calculer  $E(A_1)$  et  $V(A_1)$ .

2. a) Justifier que  $A_2(\Omega) = 2, 6$ . Montrer que la loi de  $A_2$  est donnée par :

$$P([A_2 = 2]) = \frac{1}{4}, P([A_2 = 3]) = \frac{1}{4}, P([A_2 = 4]) = \frac{5}{16}, P([A_2 = 5]) = \frac{1}{8}, P([A_2 = 6]) = \frac{1}{16}$$

b) Calculer  $E(A_2)$ .

3. a) Présenter dans un tableau la loi du couple  $(A_2, Z_2)$ . En déduire la loi de  $Z_2$  ainsi que l'espérance de  $Z_2$ .

b) Calculer la covariance  $\text{Cov}(A_2, Z_2)$  de  $A_2$  et  $Z_2$ . Les variables aléatoires  $A_2$  et  $Z_2$  sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle qu'en *Python*, l'instruction `rd.randint(1,5)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur  $1,4$ .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
A=np.zeros(100)
for k in range(100):
 t=rd.randint(1,5)
 if t<=... : A[k]=1
 if t==... : A[k]=2
 if t==... : A[k]=3
print(A)
```

5. Reconnaître les lois de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Justifier que  $X_n + Y_n$  suit la loi binomiale  $B\left(n, \frac{3}{4}\right)$ .
6. **a)** Justifier la relation :  $X_n + Y_n + Z_n = n$ . Calculer  $\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$ .
- b)** En utilisant les valeurs de  $V(X_n)$ ,  $V(Y_n)$  et  $V(X_n + Y_n)$ , montrer que :

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}.$$

- c)** Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  de  $X_n$  et  $Y_n$ .
7. **a)** Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Montrer que  $E(A_n) = \frac{7n}{4}$ .
- b)** Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$  et  $Y_n$ . Calculer  $V(A_n)$  et  $\text{Cov}(A_n, X_n)$ .
8. On rappelle que si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de même taille, la commande `plt.plot2d(x, y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , ...,  $M_n(x_n, y_n)$ . On complète le programme *Python* de la question 4 en y ajoutant les trois commandes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(1,101)
y=np.cumsum(A)
plt.plot(x, y);plt.show()
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?

# ESC 2015 Énoncé

## Exercice 1

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Partie I

1. Vérifier que  $2A^2 = A + I$ .
2. En déduire les valeurs propres que  $A$  peut avoir.
3. On considère les matrices colonne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .  
Montrer que  $X$  et  $Y$  sont vecteurs propres de  $A$ . Quelles sont les valeurs propres associées ?
4. Comment les matrices  $D$  et  $P$  ont-elles été obtenues ? Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
5. Vérifier que  $AP = PD$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
6. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
7. Donner  $D^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

8. En déduire que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$ .

### Partie II

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contigües  $A$ ,  $B$  et  $C$ . À l'instant initial 1, la mouche se trouve dans la pièce  $B$ . On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant  $n$  donné la mouche est dans la pièce  $A$  ou dans la pièce  $C$  alors elle revient dans la pièce  $B$  à l'instant  $n + 1$  ;

- si à un instant  $n$  donné la mouche est dans la pièce  $B$  alors elle y reste à l'instant  $n + 1$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , sinon elle va de façon équiprobable dans  $A$  ou dans  $C$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit l'événement  $A_n$  : « la mouche est dans la pièce  $A$  à l'instant  $n$  ». On définit de même les événements  $B_n$  et  $C_n$ . Enfin, on note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives de ces événements.

1. a) Donner  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ .

b) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n ; b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

En déduire  $b_2$ .

2. a) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :  $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ .

b) Recopier et compléter le programme PYTHON suivant qui permet d'afficher le terme  $b_{10}$  :

```
import numpy as np
B = np.zeros(.....)
B[0]=
B[1]=
for k :
 B[k+2] = ...
print(.....)
```

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la matrice colonne  $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$ .

3. a) Justifier que  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $U_{n+1} = AU_n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

b) Recopier et compléter le programme PYTHON suivant qui permet, lui aussi, de calculer et d'afficher le terme  $b_{10}$  :

```
import numpy as np
A = ...
U= np.array([[0.5],[1]])
for i in range(9):
 U=A.dot(U)
print(.....)
```

- c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :  $U_n = A^{n-1}U_1$ .
- d) En déduire l'expression de  $b_n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
- e) On exécute un des deux programmes PYTHON précédents. Il affiche :  
0.666015625.  
Est-ce cohérent avec l'expression de  $b_n$  ?
- f) Quelles sont, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les expressions de  $a_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$  ?

## Exercice 2

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  
b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $f$ .  
c) Montrer que  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur  $[1; +\infty[$  et en dessous de  $\mathcal{D}$  sur  $]0; 1]$ .
  2. a) Calculer la dérivée de  $g$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b) Montrer que  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$ . En déduire que  $g(x)$  est positif strictement sur  $]0; +\infty[$ .  
c) Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie pour tout réel  $x$  strictement positif :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
  3. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .
4. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n \geq n + 1$ .  
b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 3

Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . Lorsqu'elle se lève en retard, elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsqu'elle est à l'heure elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

#### Partie I

On considère un matin donné et on définit les événements  $R$  : « Coralie se lève en retard » et  $B$  : « Coralie prend le bus ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que  $P(B) = \frac{11}{15}$ .
2. On remarque qu'un matin donné, Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents.  
On nomme  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où Coralie prend le bus.
  - a) Reconnaître la loi de  $X$ . Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs prises par et pour chaque entier  $k$ , une expression de  $P(X = k)$  en fonction de  $k$ .
  - b) Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .
  - c) En moyenne combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?

#### Partie II

La société de bus annonce pour la semaine prochaine un préavis de grève reconductible. On suppose que durant la grève aucun bus ne circule.

Cette fois-ci, bien entendu, Coralie est obligée de se rendre au lycée à pied. Mais si elle se lève en retard, elle arrivera en retard au lycée. Chaque jour de grève, elle arrive donc en retard au lycée avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .



On admet que la durée de la grève en nombre de jours suit une variable aléatoire  $N$  dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

| $k$        | 1             | 2             | 3             |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(N = k)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de jours où Coralie est en retard au lycée pendant la période de grève.

1. Calculer  $E(N)$ .

2. Décrire  $Y(\Omega)$ , ensemble des valeurs prises par  $Y$ .

3. a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{(N=1)}(Y=0)$  et  $P_{(N=1)}(Y=1)$ .

b) En déduire que  $P((N=1) \cap (Y=0)) = \frac{1}{3}$  et que  $P((N=1) \cap (Y=1)) = \frac{1}{6}$ .

Que valent  $P((N=1) \cap (Y=2))$  et  $P((N=1) \cap (Y=3))$  ?

4. On admet que la loi conjointe du couple  $(N, Y)$  est donnée dans le tableau suivant :

| N \ Y | 0              | 1              | 2              | 3              |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1     | $\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{6}$  | 0              | 0              |
| 2     | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{72}$ | 0              |
| 3     | $\frac{1}{9}$  | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{72}$ |

a) Déterminer la loi de  $Y$ . Justifier que  $E(Y) = \frac{5}{8}$ .

b) Quelle est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève ?

c) Les variables  $Y$  et  $N$  sont-elles indépendantes ?

d) Calculer  $E(YN)$ . En déduire  $\text{cov}(Y, N)$ .

#### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)} \text{ si } t \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt$ .

b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour densité  $f$ . On nomme  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

2. a) Calculer  $F(x)$  pour tout réel  $x < 0$  et pour tout réel  $x > 1$ .

b) Montrer que si  $x \in [0;1]$  alors  $F(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$ .

c) On donne  $\ln(3) \approx 1,1$  et  $\ln(2) \approx 0,7$ . Montrer que  $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \approx \frac{4}{7}$ .

3. a) Justifier que pour tout réel  $t$  de  $[0;1]$  on a :  $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$ .

b) Calculer  $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$ .

c) Justifier que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$ .

# Ecricome 2015 Énoncé

## EXERCICE 1

### PARTIE I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer  $Q \times Q$ . En déduire que  $Q$  est inversible et expliciter  $Q^{-1}$ .
2. Calculer  $D$  (on vérifiera que  $D$  est une matrice diagonale).  
Justifier que  $M = QDQ$ .
3. Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$ .
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice  $M^n$ .

### PARTIE II : Étude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une vaut  $\frac{1}{2}$ .

On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
  - à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
  - à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),
- et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel  $n$  non nul, les événements :

- $A_n$  : « obtenir 0 Pile à l'étape  $n$  »,
- $B_n$  : « obtenir 1 Pile à l'étape  $n$  »,
- $C_n$  : « obtenir 2 Piles à l'étape  $n$  ».

et on note  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$  et  $c_n = P(C_n)$ .

1. Calculer  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Calculer les trois probabilités conditionnelles  $P_{A_n}(A_{n+1})$ ,  $P_{B_n}(A_{n+1})$  et  $P_{C_n}(A_{n+1})$ .

Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}.$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

où la matrice  $M$  a été définie dans la partie I.

(b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

## EXERCICE 2 (raccourci)

On rappelle que  $e = e^1 \simeq 2,7$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $D = ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$  par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

- Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .
- Pour  $x \in D$ , calculer  $f'(x)$  puis justifier que  $f'(x)$  est du même signe que  $\ln(x) - 1$ .
- (a) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D$  en le complétant par les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .  
(b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[e; +\infty[$  sur  $[e; +\infty[$ .

4. (a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x$ , pour  $x \in D$ .

(b) Donner le signe de  $f(x) - x$  lorsque  $x \in D$ .

5. (a) Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e.$$

(b) Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

(c) Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ .

### EXERCICE 3

Une société possède un serveur vocal qui reçoit des appels (que l'on supposera consécutifs) soit pour le produit A, soit pour le produit B. On suppose que les sujets des appels (produit A ou produit B) sont indépendants d'un appareil à l'autre.

*Les trois parties de cet exercice sont indépendantes*

#### PARTIE I : Étude de 100 appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de  $X$ . On précisera  $X(\Omega)$  ainsi que  $P(X = k)$  pour  $k \in X(\Omega)$ .

*Une réponse argumentée est attendue.*

(b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note  $Y$  le bénéfice total de la société pour 100 appels.

Justifier que  $Y = 90X + 500$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .

3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable  $X$  par la loi d'une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi de Poisson de même espérance que  $X$ .

Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de  $P(X \geq 10)$ .

## FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI DE POISSON DE PARAMETRE $\lambda$

Par exemple, si  $U$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 3$  alors  $P(U \leq 4) = 0,815$ .

|     | $\lambda$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k$ | 0         | 0,368 | 0,135 | 0,05  | 0,018 | 0,007 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
|     | 1         | 0,736 | 0,406 | 0,199 | 0,092 | 0,040 | 0,017 | 0,007 | 0,003 | 0,001 | 0,000 |
|     | 2         | 0,920 | 0,677 | 0,423 | 0,238 | 0,125 | 0,062 | 0,030 | 0,014 | 0,006 | 0,003 |
|     | 3         | 0,981 | 0,857 | 0,647 | 0,433 | 0,265 | 0,151 | 0,082 | 0,042 | 0,021 | 0,010 |
|     | 4         | 0,996 | 0,947 | 0,815 | 0,629 | 0,440 | 0,285 | 0,173 | 0,100 | 0,055 | 0,030 |
|     | 5         | 0,999 | 0,983 | 0,916 | 0,785 | 0,616 | 0,446 | 0,301 | 0,191 | 0,116 | 0,067 |
|     | 6         | 1     | 0,995 | 0,966 | 0,889 | 0,762 | 0,606 | 0,450 | 0,313 | 0,207 | 0,130 |
|     | 7         | 1     | 0,999 | 0,988 | 0,949 | 0,867 | 0,744 | 0,599 | 0,453 | 0,324 | 0,220 |
|     | 8         | 1     | 1     | 0,996 | 0,979 | 0,932 | 0,847 | 0,729 | 0,593 | 0,456 | 0,333 |
|     | 9         | 1     | 1     | 0,999 | 0,992 | 0,968 | 0,916 | 0,830 | 0,717 | 0,587 | 0,458 |
|     | 10        | 1     | 1     | 1     | 0,997 | 0,986 | 0,957 | 0,901 | 0,816 | 0,706 | 0,583 |

### PARTIE II : Étude de la première série d'appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit une infinité d'appels consécutifs. On suppose également que 20 % des appels concernent le produit A et 80 % des appels concernent le produit B. On dit que le serveur possède une **première série d'appels de longueur  $n$**  si les  $n$  premiers appels concernent le même produit et le  $(n+1)$ -ième appel concerne l'autre produit. On note :

- $X_A$  la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit A ;
- $X_B$  la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit B ;
- $L$  la variable aléatoire égale à la longueur de la première série d'appels.

Par exemple, si les 3 premiers appels concernent le produit A, les 2 appels suivants le produit B, les 4 appels le produit A, ... on symbolisera ces appels sous la forme AAABBAAAA ....

Dans ce cas, on a  $X_A = 1$ ,  $X_B = 4$  et  $L = 3$ .

1. (a) Donner la loi de  $X_A$ . On précisera  $X_A(\Omega)$  ainsi que  $P(X_A = k)$  pour  $k \in X_A(\Omega)$ .

*Une réponse argumentée est attendue.*

Donner l'espérance  $E(X_A)$  et la variance  $V(X_A)$  de  $X_A$ . En déduire l'espérance de  $X_A^2$ , notée  $E(X_A^2)$ .

- (b) De même, donner la loi de  $X_B$ , ainsi que son espérance  $E(X_B)$  et sa variance  $V(X_B)$

En déduire l'espérance de  $X_B^2$ , notée  $E(X_B^2)$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- (a) Décrire l'événement  $(L = n) \cap (X_B = n + 1)$  à l'aide d'une succession de lettres  $A$  et  $B$ .  
 Décrire l'événement  $(L = n) \cap (X_A = n + 1)$  à l'aide d'une succession de lettres  $A$  et  $B$ .
- (b) En déduire l'expression de  $P(L = n)$  en fonction de  $n$  et vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(L = n) = 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n).$$

3. À l'aide de la question précédente, montrer que les espérances de  $L$  et de  $L^2$  sont données par :

$$E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B),$$

$$E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2).$$

En déduire la valeur de l'espérance  $E(L)$  et de la variance  $V(L)$  de la variable aléatoire  $L$ .

### PARTIE III : Étude de la durée d'appel

Dans cette partie, on suppose que lors d'un appel au serveur vocal, la durée de celui-ci en minutes est une variable aléatoire  $D$  qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. On considère les deux premiers appels, dont on supposera les durées indépendantes. On note  $D_1$  la durée (en minutes) du premier appel et  $D_2$  la durée (en minutes) du second appel.

On note  $M$  la durée maximale des deux premiers appels, c'est-à-dire  $M = \max(D_1, D_2)$ .

- Donner une densité  $f$  de  $D$  ainsi que sa fonction de répartition  $F$ .
- Soit  $b$  un réel positif. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$ .
- En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$  converge et vaut  $\frac{3}{4}$ .
- Soit  $x$  un réel positif. Exprimer l'événement  $(M \leq x)$  en fonction des événements  $(D_1 \leq x)$  et  $(D_2 \leq x)$ .
- En déduire l'expression de  $P(M \leq x)$  en fonction de  $F(x)$  lorsque  $x \geq 0$ .  
 Vérifier que ce résultat reste valable si  $x < 0$ .
- On admet que  $M$  est une variable aléatoire à densité. Vérifier qu'une densité  $g$  de  $M$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Établir que  $M$  admet une espérance et donner sa valeur.

# ESCP 2015 Énoncé

- L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
- La probabilité d'un événement  $B$  est notée  $P(B)$ .

## EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs réelles telle que :  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit  $f(x)$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs réelles telle que  $g(t) = \frac{e^t}{t}$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - a) Pour tout réel  $x > 0$ , exprimer  $f(x)$  à l'aide de la fonction  $G$ .
  - b) Dédire de la question précédente que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout réel  $x > 0$ , calculer  $f'(x)$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .
  - c) Calculer  $f(1)$ .
2.
  - a) Établir pour tout réel  $x \geq 1$ , l'inégalité :  $f(x) \geq e \times \ln x$ .
  - b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3.
  - a) Établir pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, 1]$ , l'inégalité :  $f(x) \leq e^x \times \ln x$ .
  - b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et  $e$  cm pour les ordonnées). On rappelle que le nombre  $e$  est à peu près égal à 2,7.
  - a) On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$ . Pour tout réel  $x > 0$ , calculer  $f''(x)$ .
  - b) Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion  $A$  et déterminer les coordonnées du point  $A$ .
  - c) Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $A$ .
  - d) Tracer l'allure de la courbe  $(C)$  en précisant la position relative de  $(C)$  et  $(T)$ .



6. a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe un unique réel, noté  $u_n$ , vérifiant  $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$ .
- b) En utilisant les variations de la fonction  $f$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante.
- c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## EXERCICE 2

Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $M$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par :  $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ .

- Dans cette question, on choisit  $a = b = -1$ .
  - La matrice  $M$  est-elle inversible ?
  - Calculer pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $M^n$ .
- Dans cette question, on choisit  $a = b$ 
  - La matrice  $M$  est-elle inversible ?
  - Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $M^n = (1+a)^{n-1} M$ .
- On revient au cas général où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques. Montrer que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $a \neq b$ .
- Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre  $p$  avec  $0 < p < 1$ . On pose :  $q = 1 - p$ .

Soit  $N$  la matrice aléatoire définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : « la matrice  $N$  est inversible ».

- Établir la relation :  $P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k])$ .
  - Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$ .
  - En déduire  $P(A)$  en fonction de  $q$ .
5. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1.
- Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .
- Soit  $N$  la matrice aléatoire définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : « la matrice  $N$  est inversible ».
- Pour  $x$  réel, écrire les développements de  $(x+1)^n$  et  $(x+1)^{2n}$  à l'aide de la formule du binôme.

b) En utilisant l'identité  $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$ , montrer que l'on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

c) En déduire la relation :  $P([X = Y]) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

d) Calculer  $P(A)$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 3

1. Soit  $T$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Donner sans calcul les valeurs de l'espérance  $E(T)$  et de la variance  $V(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  à densité.

b) En utilisant la question 1, montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et donner sa valeur.

3. Soit  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

$$\text{Montrer que l'on a : pour tout } x \text{ réel, } F(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que  $X$ .

Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \min(X_1, X_2)$ .

4. a) Justifier que pour tout  $x$  réel, on a :  $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$ .

b) Déterminer la fonction de répartition  $H$  de la variable aléatoire  $Z$ .

c) Montrer qu'une densité  $h$  de  $Z$  est donnée par :  $h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}.$$

On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$ .

a) Pour tout  $x$  réel, calculer  $g'(x)$ .

b) En déduire que l'espérance  $E(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$  est égale à  $\frac{5}{4}$ .

6. Soit  $W$  la variable aléatoire définie par  $W = \max(X_1, X_2)$ .
- Exprimer la variable aléatoire  $Z + W$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .
  - En déduire la valeur de l'espérance  $E(W)$  de la variable aléatoire  $W$ .
  - Exprimer la variable aléatoire  $|X_1 - X_2|$  en fonction de  $Z$  et  $W$ .
  - En déduire la valeur de l'espérance  $E(|X_1 - X_2|)$  de la variable aléatoire  $|X_1 - X_2|$ .

#### EXERCICE 4

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 3 et  $I$  la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention :  $M^0 = I$ .

On se propose d'étudier la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 3 telle que  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

soit  $X_n$  la matrice à trois lignes et une colonne définie par :  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

- Déterminer  $X_0$  et  $X_1$ .
- Justifier pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $X_{n+1} = AX_n$
  - À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel  $n$ , la relation :  $X_n = A^n X_0$ .

- Soient  $P$ ,  $Q$  et  $T$  les matrices suivantes :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit  $PQ$ . En déduire que la matrice  $P$  est inversible et déterminer sa matrice inverse  $P^{-1}$ .
- Calculer les produits  $PT$  et  $AP$ . En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $A^n = PT^n P^{-1}$ .

4. Soit  $D$  la matrice définie par :  $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose :  $N = T - D$ .

a) Déterminer pour tout entier  $k \geq 2$ , la matrice  $N^k$ .

b) Vérifier que  $DN = ND$  et montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de la matrice  $A^n$ .

5. a) Déduire des questions précédentes l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

# Ecricome sujet zéro 2023 Corrigé

## Exercice 1

### Partie A

$$1. \quad MV_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times V_1.$$

$V_1$  est bien vecteur propre non nul de  $M$  et 1 est la valeur propre associée.

$$MV_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times V_2.$$

$V_2$  est bien vecteur propre non nul de  $M$  et  $\frac{1}{2}$  est la valeur propre associée.

$$MV_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times V_3.$$

$V_3$  est bien vecteur propre non nul de  $M$  et  $\frac{1}{3}$  est la valeur propre associée.

2.  $P$  est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Donc  $P$  est inversible.

Déterminons  $P^{-1}$  par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad (a) \text{ Pour faciliter les calculs, notons que } M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 :  $MP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Puis :

$$P^{-1}(MP) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = D.$$

Méthode 2 :  $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Puis :

$$(P^{-1}M)P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = D.$$

(b) Notons tout d'abord que  $D = P^{-1}MP \Leftrightarrow MP = PD \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$ .

Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, M^n = PD^nP$  :

- $PD^0P = PIP = P^2 = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $M^n = PD^nP^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$M^{n+1} = M \times M^n = PD(P^{-1} \times P)D^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

4.  $D$  est diagonale, donc :  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$ .

Par suite :  $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$ . Puis :

$$(PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On retrouve bien l'écriture de } M^n \text{ donnée.}$$

$$\text{Ou bien : } D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}. \text{ Puis :}$$

$$P(D^n P^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}. \text{ On retrouve bien l'écriture de } M^n \text{ donnée.}$$

## Partie B

5. (a)  $(X_n = 0)$ ,  $(X_n = 1)$  et  $(X_n = 2)$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) \times P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1) \times P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2) \times P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0),$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) \times 1 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 2) \times \frac{1}{3},$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2).$$

On montre de même que :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 2) \times \frac{1}{3},$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2).$$

Ainsi que :

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times 0 + P(X_n = 2) \times \frac{1}{3},$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}P(X_n = 2).$$

$$(b) \quad MU_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n=0) + \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{3}P(X_n=2) \\ \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{3}P(X_n=2) \\ \frac{1}{3}P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow MU_n = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

(c) À l'instant initial 0, la puce est sur la marche la plus haute  $M_2$ .

$$\text{Donc } U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ De plus, on a } U_n = M^n U_0.$$

(d) D'après la question A.4,

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = M^n U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par identification, } \begin{cases} P(X_n=0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ P(X_n=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ P(X_n=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}.$$

$$(e) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{3}\right| < 1.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=0) = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=1) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=2) = 0.$$

$$6. \text{ Par définition, } E(X_n) = 0 \times P(X_n=0) + 1 \times P(X_n=1) + 2 \times P(X_n=2),$$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = P(X_n=1) + 2P(X_n=2).$$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 0.$$

7. Ce script permet de calculer  $U_n$  et de déterminer le premier rang à partir duquel  $P(X_n=0) \geq 0,999$ .

8. (a) La puce peut atteindre la première marche dès le premier saut... ou ne jamais l'atteindre.  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .



(b) `rd.random()` renvoie un nombre de l'intervalle  $[0;1[$ .

`rd.random() * (A+1)` renvoie un nombre de l'intervalle  $[0; A+1[$ .

`floor` renvoyant à une partie entière, `floor(rd.random() * (A+1))` renvoie équiprobablement à un nombre entier compris entre 0 et A.

On reconnaît la loi uniforme sur  $0; A$

(c) `while A !=0 :`

`n=n+1`

`return n`

(d) Le script permet d'estimer l'espérance de  $T$ , car on procède à la moyenne de  $T$  sur 10 000 expériences. On peut donc conjecturer que l'espérance de  $T$  vaut environ 2,5.

## Exercice 2

1. (a) On remplace  $n$  par 1 :  $u_2 = \frac{1+1}{3 \times 1} u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

On remplace  $n$  par 2 :  $u_3 = \frac{2+1}{3 \times 2} u_2 = \frac{3}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ .

(b)  $u = (k+1) / (3 \times k) \times u$

2. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, u_n > 0$  :

- $u_1 = \frac{2}{3}$ . La propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n > 0$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$ . Or,  $n+1 > 0$ ,  $3n > 0$  et  $u_n > 0$ . Par produit,  $u_{n+1} > 0$ .

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

3. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .  $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3n} u_n - u_n = \frac{n+1-3n}{3n} u_n = \frac{1-2n}{3n} u_n$ .

Or,  $3n > 0$ ,  $u_n > 0$  et  $1-2n < 0$  car  $n \geq 1$ .

Par produit,  $u_{n+1} - u_n < 0$ . On en déduit que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(b)  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème de convergence monotone,  $(u_n)$  est convergente.

4. (a) La variable  $y$  est la liste des valeurs de  $(u_n)$  jusqu'au rang  $n$ .

La variable  $z$  est la liste des valeurs cumulées de  $(u_n)$  jusqu'au rang  $n$ .

(b) Il semble que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge vers un nombre proche de 1,5.

5. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{1}{3n}u_n = \frac{1}{3}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n$ .

$(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{2}{3}$  et de raison  $\frac{1}{3}$ .

(b) On en déduit, pour tout entier  $n$  non nul :  $v_n = v_1 \times b^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

(c) Comme  $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1.$$

Autre méthode :  $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  est de la forme  $p(1-p)^{n-1}$ . On reconnaît la formule de

$P(X = n)$  avec  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$ .

Par suite,  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ .

6. (a)  $X$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$  et  $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ .

(b)  $v_n = \frac{u_n}{n} \Leftrightarrow u_n = nv_n$ . Donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(X = n) = E(X) = \frac{3}{2}$ .

$\sum_{n \geq 1} u_n$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$ .

(c) Puisque  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge, par cours,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 3

1.  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique en 0.

$$g(-x) = -x e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = -x e^{-\frac{1}{2}x^2} = -g(x).$$

$g$  est donc une fonction impaire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^2 = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$  par composition, puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  par croissances comparées. Comme  $g$  est impaire,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ .

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à la courbe de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

3. (a)  $(uv)' = u'v + v'u$  et  $(e^u)' = u'e^u$ , donc  $\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ . On a donc :

$$g'(x) = 1e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \times \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

(b)  $e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $(1-x^2)$ .

1 et -1 sont racines évidentes du trinôme du second degré  $(1-x^2)$ .

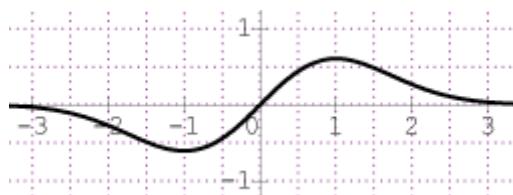
Ce dernier est donc du signe de  $a = -1$  à l'extérieur des racines.

(c) On en déduit :

| $x$               | $-\infty$                                                                                                                                                                                                              | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|-----|
| $signe.de.f'(x)$  | $-$                                                                                                                                                                                                                    | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $variations.de.f$ | <div><div><math>0</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>g(-1)</math></div><div><math>\nwarrow</math></div><div><math>g(1)</math></div><div><math>\searrow</math></div><div><math>0</math></div></div> |      |     |           |     |

Avec  $g(1) = 1e^{-\frac{1}{2} \times 1^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$  et  $g(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ .

4.



5. On a vu que :  $\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Une primitive de  $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$  est donc  $-e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

Par suite :  $I(A) = \int_0^A xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{1}{2}A^2}$ .

6. Étude de la continuité :

Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ . Donc  $f$  y est continue.

Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = g(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Donc  $f$  y est continue.

Étude de la continuité en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \end{array} \right\} f \text{ est pas continue en } 0.$$

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Étude de la positivité :

Sur  $] -\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ . Donc  $f$  est positive.

Sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$  car  $x \geq 0$ . Donc  $f$  est positive.

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  :

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx, \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \end{aligned}$$

Sous réserves de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{1}{2}A^2} = 1 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}A^2} = 0.$$

En définitive,  $f$  est bien une densité de probabilité.

7. (a) Par définition,  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

$$\text{Si } x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\text{Si } x \geq 0, \text{ d'après la relation de Chasles, } F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = I(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

(b) On a alors :  $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \times 2^2}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \times 1^2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2}.$

8. (a) Puisque  $h$  est une densité de probabilité,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{La fonction } x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ étant paire, } \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

(b)  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto x e^{-\frac{1}{2}x^2}$  sont continues et dérivables sur  $[0 ; A]$ .

$$\text{On intègre par parties : } \int uv' = uv - \int u'v.$$

$$\text{On pose : } u(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$\text{On a : } u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$J(A) = \int_0^A x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[ -x e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^A - \int_0^A -e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -A e^{-\frac{1}{2}A^2} + \int_0^A e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

(c) Par définition,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x) dx$ .

D'après la relation de Chasles,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx,$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx + \int_0^{+\infty} x \times x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Sous réserves de convergence,

$$E(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} J(A).$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -Ae^{-\frac{1}{2}A^2} = 0 \text{ par croissances comparées, et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Finalement,  $E(X)$  existe et  $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

9. (a) Par définition,  $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$ .

Si  $x < 0$ ,  $G(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ .

Si  $x \geq 0$ ,  $G(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ .

De plus,  $F(-\sqrt{x}) = 0$ , et  $F(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$ .

(b) On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Donc  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ . On a alors  $E(Y) = \frac{1}{1/2} = 2$  et  $V(Y) = \frac{1}{(1/2)^2} = 4$ .

(c) 

```
import numpy.random as rd
Y=rd.exponential(2,10)
print(Y)
```

(d) 

```
import numpy.random as rd
Y=rd.exponential(2,10)
import numpy as np
X=np.sqrt(Y)
print(X)
```

# Extraits autres sujets zéro 2023 Corrigé

## Ecricome ECG Mathématiques Appliquées

### Exercice 1

```
1. import numpy.random as rd
 def simulY(p):
 if rd.random() < p : return 1
 else : return -1
2. def marche (n,p):
 X=0
 for k in range (n):
 X+= simulY(p)
 return X
```

### Exercice 2

1. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, «  $F_n$  et  $F_{n+1}$  sont strictement positifs ».

$F_1 = 1 > 0$  et  $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 > 0$ . La propriété est vraie au rang 1.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est à dire que  $F_n$  et  $F_{n+1}$  sont strictement positifs. Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

$F_{n+1} > 0$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > 0$  par somme de termes strictement positifs.

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier  $n$  non nul.

- (b) Comme  $F_n > 0$  à partir de  $n=1$ ,  $F_{n+1} + F_n > F_{n+1} \Leftrightarrow F_{n+2} > F_{n+1}$ .

$(F_n)_{n \geq 0}$  est donc strictement croissante à partir du rang 2.

- (c) Démontrons par récurrence que, pour tout  $n$ , «  $F_n \geq n-1$  ».

$F_0 = 0 \geq 0-1$ ,  $F_1 = 1 \geq 1-1$ ,  $F_2 = 1 \geq 2-1$  et  $F_3 = 2 \geq 3-1$ .

La propriété est donc vraie aux rangs 0, 1, 2 et 3.

Soit  $n \geq 3$ , on suppose que la propriété est vraie **jusqu'au** rang  $n$ .

Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq n-1 + n-2 = n-3 + n \geq n$  car  $n \geq 3$ .

La propriété est donc vraie au rang  $n+1$ .

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

(d) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$ , par théorème de minoration,  $(F_n)_{n \geq 0}$  diverge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$ .

```
2. def fibo(n) :
 u,v=0,1
 for i in range(1,n+1) :
 u,v=v,u+v
 return u

3. def recherche(x,L):
 indice=1
 while L[indice]<=x:
 indice=indice+1
 return L[indice-1]
```

## HEC-ESSEC ECG Mathématiques Appliquées

### Exercice

1. Cette relation peut aussi s'écrire  $r = \frac{a}{t^b} \Leftrightarrow \ln(r) = \ln(a) - b \ln(t)$ .

On a représenté le nuage de points  $(\ln(t_i), \ln(r_i))_{i \in 1,n}$  et on constate un très bon alignement des points, donc on peut considérer qu'une telle relation est raisonnable. On peut par ailleurs calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les  $\ln(t_i)$  et les  $\ln(r_i)$ . S'il est proche de 1 en valeur absolue, on peut alors valider la relation. Pour obtenir  $(a,b)$  on peut réaliser un ajustement aux moindres carrés du nuage de points  $(\ln(t_i), \ln(r_i))$ .

2. a)  $F_T(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

Si  $x < x_0$ ,  $F_T(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $x \geq x_0$ , d'après la relation de Chasles :

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{x_0} 0 dt + \int_{x_0}^x \theta \frac{x_0^\theta}{t^{\theta+1}} dt$$

$$\Leftrightarrow F_T(x) = 0 + \left[ -\frac{x_0^\theta}{t^\theta} \right]_{x_0}^x = 1 - \frac{x_0^\theta}{x^\theta} = 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^\theta.$$

b) Par définition,  $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ . D'après la relation de Chasles :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{x_0} x f(x) dx + \int_{x_0}^{+\infty} x f(x) dx,$$

$$\Leftrightarrow E(T) = \int_{-\infty}^{x_0} x \times 0 dx + \int_{x_0}^{+\infty} x \times \theta \frac{x_0^\theta}{x^{\theta+1}} dx,$$

$$\Leftrightarrow E(T) = 0 + \theta x_0^\theta \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\theta} dx.$$

Sous réserves de convergence,

$$E(T) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta x_0^\theta \int_{x_0}^A \frac{1}{x^\theta} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta x_0^\theta \left[ -\frac{1}{(\theta-1)x^{\theta-1}} \right]_{x_0}^A,$$

$$\Leftrightarrow E(T) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta x_0^\theta \left( \frac{1}{(\theta-1)x_0^{\theta-1}} - \frac{1}{(\theta-1)A^{\theta-1}} \right).$$

Or,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{\theta-1}} = 0$ . Donc  $E(T)$  existe et  $E(T) = \frac{\theta x_0^\theta}{(\theta-1)x_0^{\theta-1}} = \frac{\theta}{(\theta-1)} x_0$ .



# ESC 2021 Corrigé

## Exercice 1

$$1. M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M.$$

$M$  est bien idempotente.

2. a)  $M^2 = M \Leftrightarrow M^2 - M = O$ .  $X^2 - X$  est bien un polynôme annulateur de  $M$ .

b)  $X^2 - X = X(X - 1)$ . 0 et 1 sont les racines évidentes de ce polynôme.

Ce sont les seules valeurs propres possibles de  $M$ .

c)  $N^2 = (I - M)^2 = I - 2M + M^2$  car  $I$  et  $M$  commutent,

$$\Leftrightarrow N^2 = I - 2M + M \text{ car } M^2 = M,$$

$$\Leftrightarrow N^2 = I - M = N. N \text{ est bien idempotente.}$$

$$3. a) C^2 = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times -2 & 2 \times 1 + 1 \times -1 \\ -2 \times 2 - 1 \times -2 & -2 \times 1 - 1 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

$C$  est bien idempotente. Par suite, d'après la question 2. c),  $D$  l'est aussi.

$$\text{Dès lors : } CD = C(I - C) = C - C^2 = C - C = O \text{ et}$$

$$DC = (I - C)C = C - C^2 = C - C = O.$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $B^n = 2^n C + D$ .

$$2^0 C + D = C + D = C + I - C = I = B^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est à dire que

$$B^n = 2^n C + D, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$B^{n+1} = B^n \times B = (2^n C + D)(2C + D) = 2^{n+1}C^2 + 2^n CD + 2DC + D^2,$$

$$\Leftrightarrow B^{n+1} = 2^{n+1}C + D \text{ car } C^2 = C, CD = 0, DC = O \text{ et } D^2 = D.$$

La propriété est donc vraie au rang  $n+1$ .

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

On en déduit :

$$B^n = 2^n C + D = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } P^2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times -1 \\ 1 \times 1 - 1 \times 1 & 1 \times 0 - 1 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

On en déduit que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{d) } P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis :}$$

$$P^{-1}A P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ car } B = 2C + D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou bien :

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis :}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

e) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = PB^n P^{-1}$ .

$$PB^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est à dire que

$A^n = PB^n P^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^n P^{-1} \times PBP^{-1} \text{ car } P^{-1}AP = B \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PB^n IBP^{-1} = PB^{n+1} P^{-1}.$$

La propriété est donc vraie au rang  $n+1$ .

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

$$\text{f) } PB^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow PB^n = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 \times 2^n - 1 - (-2 \times 2^n + 2) & 2^n - 1 - (-2^n + 2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow PB^n = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 \times 2^n - 1 + 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 1 + 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow PB^n = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 4 \times 2^n - 3 & 2 \times 2^n - 3 \end{pmatrix} \text{ puis :}$$

$$PB^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 4 \times 2^n - 3 & 2 \times 2^n - 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6 \times 2^n - 6 & -2 \times 2^n + 3 \end{pmatrix}.$$

Ou bien :

$$B^n P^{-1} = B^n P = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 + 2^n - 1 & -2^n + 1 \\ -2 \times 2^n + 2 - 2^n + 2 & 2^n - 2 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ -3 \times 2^n + 4 & 2^n - 2 \end{pmatrix} \text{ puis :}$$

$$P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ -3 \times 2^n + 4 & 2^n - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6 \times 2^n - 6 & -2 \times 2^n + 3 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

1. On pose :  $a=1$ ,  $b=1$  et  $c=1$ . Le discriminant de ce trinôme est :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$ . Le trinôme est donc du signe de  $a$  et  $x^2 + x + 1 > 0$ .

2. Par cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{ par composée de limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{ par composée de limites : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

3.  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4 = \ln 3 - 2\ln 2$ .

4. a) Comme  $x^2 + x + 1 > 0$ ,  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ donc } f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

b) Comme  $x^2 + x + 1 > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $2x+1$ .

$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ . On en déduit :

|                          |                                                                                                    |                |           |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------|
| $x$                      | $-\infty$                                                                                          | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $\text{signe.de.}f'(x)$  | $-$                                                                                                | $0$            | $+$       |
| $\text{variations.de.}f$ | $+\infty \swarrow \quad \searrow f\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \swarrow \quad \searrow +\infty$ |                |           |

5. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0.$

0 et 1 sont donc les seules solutions de l'équation  $f(x) = 0.$

b)  $f(0) = \ln 1 = 0$  et  $f'(0) = \frac{1}{1} = 1.$  Une équation de la tangente à la courbe de  $f$  en 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1 \times x + 0 = x.$$

$f(-1) = \ln 1 = 0$  et  $f'(-1) = \frac{-1}{1} = -1.$  Une équation de la tangente à la courbe de  $f$  en

$-1$  est :  $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -1 \times (x+1) + 0 = -x-1.$

6. a)  $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$  et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$  d'où :

$$f''(x) = \frac{(2)(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

b) Étudions le signe de  $f''(x).$   $x^2+x+1 > 0$  donc  $f''(x)$  est du signe de  $-2x^2-2x+1.$

On pose :  $a = -2, b = -2$  et  $c = 1.$  Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12 > 0. \text{ Il y a deux racines :}$$

$$\frac{2-\sqrt{12}}{-4} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

7. a) Appliquons le théorème de la bijection sur  $[0; +\infty[.$

$f$  est continue sur  $[0; +\infty[.$

$f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[.$

$$1 \in f([0; +\infty[) = \left[ f\left(-\frac{1}{2}\right); +\infty \right[ \text{ car } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \text{ puisque } \frac{3}{4} < 1.$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $f(x) = 1$  possède une solution unique

$\alpha$  sur  $[0; +\infty[.$

b)  $f(0) = \ln 1 = 0 < 1$  et  $f(1) = \ln 3 > 1.$  On en déduit que  $\alpha \in [0; 1].$

c)  $f(-1-\alpha) = \ln((-1-\alpha)^2 + (-1-\alpha) + 1) = \ln(1+2\alpha+\alpha^2-1-\alpha+1),$

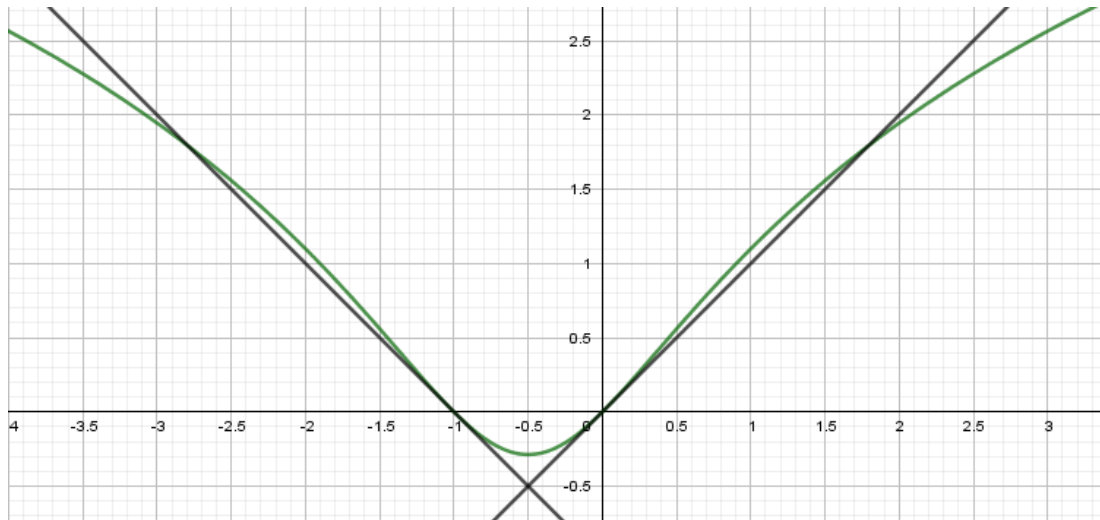
$$\Leftrightarrow f(-1-\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha + 1) = f(\alpha) = 1.$$

```

d) 1. import numpy as np
 2. def f(x):
 3. return np.log(x**2+x+1)
 4. a=0
 5. b=1
 6. while b-a>10**(-3):
 7. c=(a+b)/2
 8. if f(c)<1 : a=c
 9. else : b=c
 10. print(c)

```

8.



### Exercice 3

1. a) À l'issue du premier lancer, le joueur a une chance sur deux d'atteindre 1 puis d'utiliser la cible B et une chance sur deux d'atteindre 2 et de continuer d'utiliser la cible A. Donc  $a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$ .

- b)  $A_2$  et  $B_2$  constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$b_3 = P(A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

2.  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}),$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} + c_n \times 0 = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n.$$

3. a)  $b = 3/4 * b + 1/2 * a$   
 $a = 1/2 * a$

b) L'échange des lignes 4 et 5 permet de calculer  $\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$  et non plus  $\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$ .

4.  $(a_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $a_1 = 1$ .

On a donc :  $a_n = a_1 \times b^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

5. a)  $v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 2^0 \times 0 + 2 = 2$ .

$$v_{n+1} = 2^n b_{n+1} + 2 = 2^n \left( \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n \right) + 2 = 2^n \left( \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) + 2,$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 2^n \left( \frac{3}{4}b_n + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) + 2 = \frac{3 \times 2^n}{4} b_n + 1 + 2 = \frac{3 \times 2^n}{2 \times 2} b_n + 3,$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{3}{2} (2^{n-1} b_n + 2) = \frac{3}{2} v_n.$$

b)  $(v_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{3}{2}$  et de premier terme  $v_1 = 2$ .

On a donc :  $v_n = v_1 \times b^{n-1} = 2 \times \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul..

c)  $2^{n-1}b_n + 2 = v_n = 2 \times \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1}b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - 2 \Leftrightarrow b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1} \times 2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}},$

$$\Leftrightarrow b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. `secteur=rd.randint(1,5)`  
`if secteur==1 : cible="c"`

7. a) La probabilité de gagner un lot dans ces conditions est :

$$P(B_2 \cap C_3) = P(B_2) \times P_{B_2}(C_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

b) On effectue 20 expériences identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- le joueur gagne un lot, avec la probabilité  $1/8$
- le joueur ne gagne pas de lot, avec la probabilité  $7/8$

$Y$  compte le nombre de succès.

$Y$  suit donc la loi binomiale de paramètres 20 et  $1/8$ .

$$Y(\Omega) = 0 ; 20 \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), P(X = k) = \binom{20}{k} \left( \frac{1}{8} \right)^k \left( \frac{7}{8} \right)^{20-k}.$$

c) On en déduit :  $E(Y) = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$  et  $V(Y) = 20 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}$ .

- d) Les 20 joueurs payent 2 euros et le forain perd 5 euros pour chacun des  $Y$  gagnants.  
On a donc :  $G = 2 \times 20 - 5 \times Y = 40 - 5Y$ . Or  $2(20 - Y) - 2Y = 40 - 2Y - 2Y = 40 - 4Y$ .  
Erreur d'énoncé ! Bref,  $E(G) = E(40 - 5Y) = 40 - 5E(Y)$  par linéarité.  
Finalement,  $E(G) = 40 - 5 \times \frac{5}{2} = \frac{80 - 25}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$ .

## Exercice 4

1. a) Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0$ . Donc  $f$  est positive sur  $]-\infty ; 0[$ .  
Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = e^{-t/2} - e^{-t}$ . Étudions le signe de  $f(t) = e^{-t/2} - e^{-t}$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
$$e^{-t/2} - e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t/2} \geq e^{-t} \Leftrightarrow -t/2 \geq -t \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } ]0 ; +\infty[ ,$$
  
$$\Leftrightarrow -t/2 + t \geq 0 \Leftrightarrow t/2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0.$$
  
Or  $t \in ]0 ; +\infty[$ . On en déduit que  $f$  est positive sur  $]0 ; +\infty[$ .  
En définitive,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0$ . Donc  $f$  est continue sur  $]-\infty ; 0[$ .  
Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = e^{-t/2} - e^{-t}$ . Donc  $f$  est continue sur  $]0 ; +\infty[$ .  
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0 \\ f(0) = e^{-0/2} - e^{-0} = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} f \text{ est continue en } 0.$$
  
En définitive,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- c) Sous réserve de convergence :
- $$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-at} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{-a} e^{-at} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{-a} e^{-a \times A} - \frac{1}{-a} e^{-a \times 0} \right),$$
- $$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{-a} e^{-a \times A} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-a \times A} = 0.$$
- d)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .  
D'après la relation de Chasles :
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} (e^{-t/2} - e^{-t}) dt,$$
- $$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + \int_0^{+\infty} (e^{-t/2} - e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ par linéarité.}$$
- Or, d'après la question précédente,  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$ .
- On a donc  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{1}$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt = \frac{1}{1/2} = 2$ .
- Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 - 1 = 1$ .
- En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

2. a)  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

Si  $x < 0$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$

b) Si  $x \geq 0$ ,  $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt$  d'après la relation de Chasles.

D'où :  $F(x) = \int_0^x (e^{-t/2} - e^{-t}) dt = \left[ \frac{1}{-1/2} e^{-t/2} - \frac{1}{-1} e^{-t} \right]_0^x,$

$\Leftrightarrow F(x) = \left[ -2e^{-t/2} + e^{-t} \right]_0^x = -2e^{-x/2} + e^{-x} - (-2e^{-0/2} + e^{-0}),$

$\Leftrightarrow F(x) = -2e^{-x/2} + e^{-x} - (-1) = -2e^{-x/2} + e^{-x} + 1.$

3. a) Par cours, une densité  $g$  de  $Y$  est :  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ae^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  et  $E(Y) = \frac{1}{a}.$

b)  $E(Y) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t g(t) dt = \frac{1}{a}$  car  $g(x) = 0$  si  $x < 0.$

$E(Y) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t a e^{-at} dt = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}.$

c) Sous réserve de convergence,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt.$

D'après la relation de Chasles :

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^{+\infty} t (e^{-t/2} - e^{-t}) dt,$

$\Leftrightarrow E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} t (e^{-t/2} - e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t \times e^{-t/2} dt - \int_0^{+\infty} t \times e^{-t} dt$  par linéarité.

Or, d'après la question précédente,  $\int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}.$

On a donc  $\int_0^{+\infty} t \times e^{-t} dt = \frac{1}{1^2} = 1$  et  $\int_0^{+\infty} t \times e^{-t/2} dt = \frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 4.$

Finalement,  $E(X) = 4 - 1 = 3.$



# Ecricome 2021 Corrigé

## EXERCICE 1

$$1. (a) \quad M - I \quad M + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

(b)  $M - I \quad M + 3I = O$ . Un polynôme annulateur de  $M$  est donc  $X - 1 \quad X + 3$ .

(c) Les valeurs propres possibles de  $M$  sont les racines du polynôme annulateur précédent.

Or ces racines sont évidentes puisque ce polynôme est factorisé : 1 et  $-3$ .

$$2. (a) \quad M - I \quad M + 3I = O \Leftrightarrow M^2 + 3M - M - 3I = O \Leftrightarrow M^2 = -2M + 3I.$$

(b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = u_n M + v_n I$ .

- $u_0 M + v_0 I = 0 \times M + 1 \times I = I = M^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$M^n = u_n M + v_n I$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$  :

$$M^{n+1} = M \times M^n = M \times (u_n M + v_n I) = u_n M^2 + v_n M,$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = u_n (-2M + 3I) + v_n M = -2u_n M + 3u_n I + v_n M,$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = (-2u_n + v_n) M + 3u_n I = u_{n+1} M + v_{n+1} I.$$

La propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

$$3. (a) \text{ On pose : } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- $A^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ . La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$  :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(c)

|                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>#script1 import numpy as np n=int(input('n= ')) A=np.array([[ -2,1],[3,0]]) C=np.array([[0],[1]]) C=np.linalg.matrix_power(A,n).dot(C) print(C)</pre> | <pre>#script2 import numpy as np n=int(input('n= ')) A=np.array([[ -2,1],[3,0]]) C=np.array([[0],[1]]) for k in range(n):     C=A.dot(C) print(C)</pre> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

4. (a)  $AV_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times V_1.$

$V_1$  est vecteur propre non nul de  $A$  et 1 est la valeur propre associée à  $V_1$ .

$$AV_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \times V_2.$$

$V_2$  est vecteur propre non nul de  $A$  et  $-3$  est la valeur propre associée à  $V_2$ .

(b)  $1 \times -1 - 3 \times 1 = -1 - 3 = -4 \neq 0.$

Donc  $Q$  est inversible et  $Q^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) Méthode 1 :

$$A \times Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Puis :}$$

$$D = Q^{-1}AQ = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 :

$$Q^{-1}A = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Puis :}$$

$$D = Q^{-1}AQ = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Méthode 3 :

$Q$  est inversible et ses colonnes sont les vecteurs propres de  $A$ .

Donc  $A$  est diagonalisable et il existe une matrice  $D$ , dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres respectives 1 et  $-3$  et telle que  $D = Q^{-1}AQ$ .

Plus précisément,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

(d) Notons tout d'abord que :  $D = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow QD = AQ \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$ .

Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = QD^nQ^{-1}$ .

- $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$A^n = QD^nQ^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = QD \underbrace{Q^{-1} \times Q}_I D^n Q^{-1} = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(e)  $D$  est diagonale, donc  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n$ .

Méthode 1 :

$$QD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -3^n \\ 3 & -3^n \end{pmatrix}. \text{ Puis :}$$

$$A^n = QD^nQ^{-1} = QD^n Q^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -3^n \\ 3 & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + -3^{n+1} & -1 + -3^n \\ -3 - -3^{n+1} & -3 - -3^n \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 :

$$D^n Q^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3^{n+1} & -3^n \end{pmatrix}. \text{ Puis :}$$

$$A^n = Q D^n Q^{-1} = Q D^n Q^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3^{n+1} & -3^n \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + -3^{n+1} & -1 + -3^n \\ -3 - -3^{n+1} & -3 - -3^n \end{pmatrix}.$$

(f) D'après la question 3. (b) :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + -3^{n+1} & -1 + -3^n \\ -3 - -3^{n+1} & -3 - -3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + -3^n \\ -3 - -3^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} u_n = \frac{-1}{4} (-1 + -3^n) \\ v_n = \frac{-1}{4} (-3 - -3^n) \end{cases}.$$

5. (a) D'après la question 2. (b),  $M^n = u_n M + v_n I$ . On en déduit :

$$M^n = \frac{-1}{4} (-1 + -3^n) M + \frac{-1}{4} (-3 - -3^n) I,$$

$$\Leftrightarrow M^n = \frac{-1}{4} \left( (-1 + -3^n) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + (-3 - -3^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\Leftrightarrow M^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2(-1 + -3^n) + (-3 - -3^n) & -2(-1 + -3^n) & 1(-1 + -3^n) \\ 2(-1 + -3^n) & -3(-1 + -3^n) + (-3 - -3^n) & 2(-1 + -3^n) \\ -1(-1 + -3^n) & 2(-1 + -3^n) & 0(-1 + -3^n) + (-3 - -3^n) \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow M^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -2 + 2 \cdot 3^n & -3^n & -3^n \\ -2 + 2 \cdot 3^n & & \\ 1 - 3^n & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot 3^n & -1 + 3^n \\ 3 - 3 \cdot 3^n & -3^n & -3^n & -2 + 2 \cdot 3^n \\ -2 + 2 \cdot 3^n & & -3 - 3^n \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow M^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -5 + 3^n & 2 - 2 \cdot 3^n & -1 + 3^n \\ -2 + 2 \cdot 3^n & -4 \cdot 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n \\ 1 - 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n & -3 - 3^n \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice  $C$  désigne la matrice colonne  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Donc  $C[0, 0] \cdot M + C[1, 0] \cdot I$

correspond à  $u_n M + v_n I$ , c'est à dire  $M^n$ . Le script renvoie donc à  $M^n$ .

## EXERCICE 2

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  par croissance comparée.

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$ .

(b)  $f$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $[1; +\infty[$ .

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc : } f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \times (x) - (1)' \times (\ln x)}{(x)^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

- $x^2 > 0$  car  $x > 0$ .
- $f'(x)$  est donc du signe de  $1 - \ln x$ .

(c)  $1 - \ln x \geq 0$ .

$$\Leftrightarrow -\ln x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

On en déduit le signe de  $f'(x)$  puis le tableau des variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  :

|                          |   |     |           |
|--------------------------|---|-----|-----------|
| $x$                      | 1 | $e$ | $+\infty$ |
| $\text{signe.de.}f'(x)$  | + | 0   | -         |
| $\text{variations.de.}f$ |   |     |           |

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \text{ et } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

2. (a)  $f'$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $[1; +\infty[$ .

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc :}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \times (x^2) - (2x) \times (1 - \ln x)}{(x^2)^2} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^2},$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(-3 + 2 \ln x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

(b) Étudions le signe de

- $x^3 > 0$  car  $x > 0$ .
- $f''(x)$  est donc du signe de  $2 \ln x - 3$ .

$$2 \ln x - 3 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{3/2} \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

On en déduit le signe de  $f''(x)$  puis la convexité de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  ( $e^{3/2} \in [1; +\infty[$ ) :

|                          |         |           |           |
|--------------------------|---------|-----------|-----------|
| $x$                      | 1       | $e^{3/2}$ | $+\infty$ |
| $\text{signe.de.}f''(x)$ | -       | 0         | +         |
| $\text{convexite.de.}f$  | concave | PI        | convexe   |

$f''(x)$  change de signe en  $e^{3/2}$ , donc  $f$  admet un point d'inflexion en  $e^{3/2}$ .

$$3. (a) f(e^{3/2}) = \frac{\ln(e^{3/2})}{e^{3/2}} = \frac{3/2}{e^{3/2}} = \frac{3}{2e^{3/2}}. M \text{ a pour coordonnées } \left(e^{3/2}; \frac{3}{2e^{3/2}}\right).$$

$$(b) f(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}} \text{ et } f'(e^{3/2}) = \frac{1 - \ln e^{3/2}}{(e^{3/2})^2} = \frac{1 - 3/2}{e^{(3/2) \times 2}} = \frac{-1/2}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

Une équation de la tangente ( $T$ ) à  $C_f$  au point  $M$  est :

$$y = f'(e^{3/2})(x - e^{3/2}) + f(e^{3/2}) = -\frac{1}{2e^3}(x - e^{3/2}) + \frac{3}{2e^{3/2}}.$$

(c) Le point d'intersection de  $y = -\frac{1}{2e^3}(x - e^{3/2}) + \frac{3}{2e^{3/2}}$  avec  $x = 0$  a pour ordonnée :

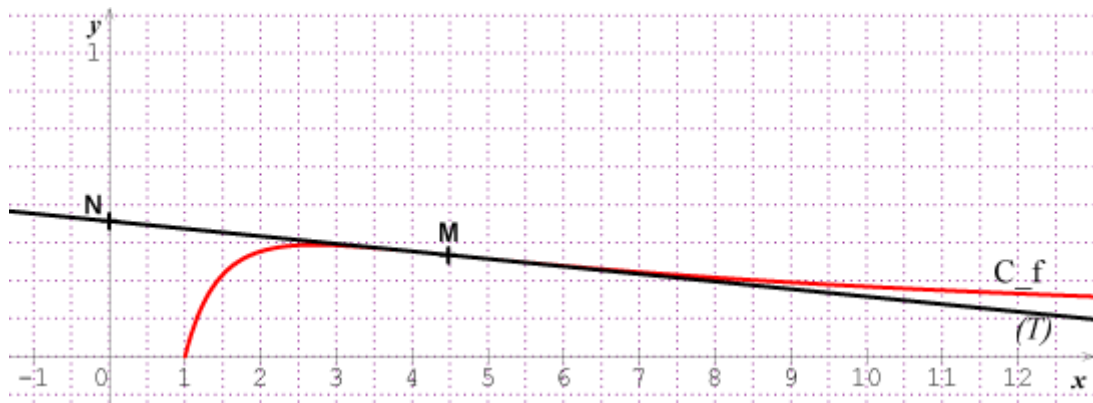
$$y = -\frac{1}{2e^3}(0 - e^{3/2}) + \frac{3}{2e^{3/2}} = \frac{e^{3/2}}{2(e^{3/2})^2} + \frac{3}{2e^{3/2}} = \frac{1}{2e^{3/2}} + \frac{3}{2e^{3/2}} = \frac{4}{2e^{3/2}} = \frac{2}{e^{3/2}}.$$

(On a remplacé  $x$  par 0). Le point  $N$  a pour coordonnées  $N\left(0; \frac{2}{e^{3/2}}\right)$ .

(d) Pour déterminer la position de  $C_f$  par rapport à  $(T)$  sur  $[1; +\infty[$ , on se sert de la convexité :

- sur  $[1; e^{3/2}]$ ,  $f$  est concave, donc  $C_f$  se situe au-dessous de ses tangentes, en particulier  $(T)$ .
- sur  $[e^{3/2}; +\infty[$ ,  $f$  est convexe, donc  $C_f$  se situe au-dessus de ses tangentes, en particulier  $(T)$ .

4.



$$5. (a) I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x} \times \ln(x)}_{\text{forme } u'u} dx = \underbrace{\left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^A}_{\text{forme } \frac{u^2}{2}} = \frac{(\ln A)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{(\ln A)^2}{2}.$$

$$(b) \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{(\ln A)^2}{2} = +\infty. \text{ Donc l'intégrale généralisée } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \text{ diverge.}$$

6. (a) Les fonctions  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sont continues et dérivables sur  $[1; A]$ .

$$\text{On pose } u(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = -\frac{1}{x}$$

On intègre par parties :  $\int u v' = [u v] - \int u' v$

$$J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left( -\frac{1}{x} \right) dx,$$

$$\Leftrightarrow J(A) = \left[ -\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^A - \left[ \frac{1}{x} \right]_1^A,$$

$$\Leftrightarrow J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{\ln(1)}{1} - \left[ \frac{1}{A} - \frac{1}{1} \right] = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

(b)  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$  et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$  par croissance comparée, donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = 1$ .

7. (a) • sur  $] -\infty, 1[$ ,  $g(x) = 0$ . Donc  $g$  est continue sur  $] -\infty, 1[$ .
- sur  $] 1; +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ . Donc  $g$  est continue comme quotient de dénominateur non nul sur  $] 1; +\infty[$ .
- en 1 : 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \end{array} \right\} g \text{ est continue en } 1.$$

En définitive,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) • D'après la question précédente,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Étudions la positivité de  $g$  :
- sur  $] -\infty, 1[$ ,  $g(x) = 0$ . Donc  $g(x) \geq 0$  sur  $] -\infty, 1[$ ,
  - sur  $] 1; +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ . Donc  $g(x) \geq 0$  sur  $] 1; +\infty[$  car  $x^2 \geq 0$  et  $\ln(x) \geq 0$  sur  $] 1; +\infty[$ .
- $g$  est donc positive sur  $\mathbb{R}$ .

- Calculons, si elle existe,  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  :

- d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 g(x) dx + \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

- Or, d'après la question 6,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = 1$ .

En définitive,  $h$  est donc bien une densité de probabilité.



(c)

```
1. import matplotlib.pyplot as plt
2. import numpy as np
3. def g(x):
4. if x.any() >= 1 : return np.log(x)/x**2
5. else: return 0
6. x=np.linspace(-4, 8, 100)
7. plt.plot(x, g(x)); plt.show()
```

(d) On obtient la représentation graphique de la fonction  $g$  sur  $[-4; 8]$ .

8. (a) La fonction de répartition de  $X$  est définie par :  $G(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$ .

Si  $x < 1$  :  $G(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $x \geq 1$  : d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = F(1) + \int_1^x g(t) dt = 0 + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}.$$

$$(b) P([X > e^2]) = 1 - G(e^2) = 1 - 1 + \frac{1}{e^2} + \frac{\ln(e^2)}{e^2} = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^2}.$$

$$P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{P([X > e^2] \cap [X > e])}{P([X > e])} = \frac{\overbrace{P([X > e^2])}^{\text{car } [X > e^2] \subset [X > e]}}{P([X > e])} = \frac{1 - G(e^2)}{1 - G(e)},$$

$$\Leftrightarrow P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{1}{e} + \frac{\ln(e)}{e}} = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{e}} = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} = \frac{3}{e^2} \times \frac{e}{2} = \frac{3}{2e}.$$

(c) Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = \int_{-\infty}^1 x g(x) dx + \int_1^{+\infty} x g(x) dx = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Or, d'après la question 5. (b), l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$  diverge.

La variable aléatoire  $X$  n'admet pas d'espérance.

## EXERCICE 3

### PARTIE A

1. (a)  $n$  étant un entier naturel,  $[X > n-1] = [X \geq n]$ .

De plus,  $[X \geq n]$  si, soit  $[X = n]$ , soit  $[X > n]$ .

En définitive,  $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$ .

- (b) D'après la question précédente,

$$P([X > n-1]) = P([X = n] \cup [X > n]),$$

$$\Leftrightarrow P([X > n-1]) = P([X = n]) + P([X > n]) \text{ par incompatibilité,}$$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} = P([X = n]) + u_n,$$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} - u_n = P([X = n]).$$

2. (a) On a vu précédemment :  $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$ .

Ainsi, sachant  $[X > n-1]$ ,  $[X = n]$  et  $[X > n]$  sont deux événements contraires.

Il vient :  $P_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - P_{[X > n-1]}([X = n])$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

- (b) D'après la question précédente,  $P_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - P_{[X > n-1]}([X = n]) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ .

$$\text{D'autre part, } P_{[X > n-1]}([X > n]) = \frac{P([X > n-1] \cap [X > n])}{P([X > n-1])} = \frac{P([X > n])}{P([X > n-1])} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

$$\text{On en déduit : } \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}.$$

- (c)  $(u_n)$  est donc la suite géométrique de raison  $\frac{3}{5}$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .

$$\text{On en déduit : } u_n = u_0 \times b^n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

3. (a)  $P([X = n]) = u_{n-1} - u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ .

- (b)  $P([X = n]) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$  est de la forme  $p(1-p)^{n-1}$ .

$X$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{5}$ .

- (c) On en déduit :  $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/5} = \frac{5}{2}$  et  $V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-2/5}{(2/5)^2} = \frac{3/5}{4/25} = \frac{15}{4}$ .

## PARTIE B

4. (a)

```
import numpy.random as rd
def geom():
 X=1
 while rd.random()>2/5 : X=X+1
 return X
```

(b)

```
def simulZ():
 X1=geom()
 X2=geom()
 if X1>X2 : Z=X1
 else : Z=X2
 return Z
```

5. Méthode 1 :  $P([X_1 \leq n]) = 1 - P([X_1 > n]) = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$ .

Méthode 2 :  $P([X_1 \leq n]) = P([X_1 = 1] \cup [X_1 = 2] \cup \dots \cup [X_1 = n])$ ,

$\Leftrightarrow P([X_1 \leq n]) = P([X_1 = 1]) + P([X_1 = 2]) + \dots + P([X_1 = n])$  par incompatibilité.

Or  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right)$ . Donc  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $p(X = k) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
 P([X_1 \leq n]) &= \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \dots + \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \\
 \Leftrightarrow P([X_1 \leq n]) &= \frac{2}{5} \underbrace{\left[ 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right]}_{1+b+\dots+b^{n-1} = \frac{1-b^n}{1-b}}, \\
 \Leftrightarrow P([X_1 \leq n]) &= \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n.
 \end{aligned}$$

6. (a)  $Z$  est le maximum de  $X_1$  et  $X_2$ . Il est donc inférieur à une valeur si, et seulement si

$X_1$  et  $X_2$  sont à la fois inférieurs à cette valeur.  $[Z \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]$ .

(b) Par indépendance des variables,

$$P([Z \leq n]) = P([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]) = P([X_1 \leq n]) \times P([X_2 \leq n]),$$

$$\Leftrightarrow P([Z \leq n]) = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 \text{ puisque } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi,}$$

$$\Leftrightarrow P([Z \leq n]) = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} \text{ (inutile de développer toutefois ici).}$$

(c) En raisonnant comme en 1. (a),  $P([Z = n]) = P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1])$ . Dès lors :

$$P([Z = n]) = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)^2}_{a^2 - b^2},$$

$$\Leftrightarrow P([Z = n]) = \underbrace{\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]}_{(a-b)} \underbrace{\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]}_{(a+b)},$$

$$\Leftrightarrow P([Z = n]) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left[2 - \frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7.  $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$  converge et  $\left|\frac{9}{25}\right| < 1$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$  converge également.

Dès lors, par linéarité, les sommes étant convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z \leq n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \right] = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

Or,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$ . Il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z \leq n]) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16},$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P([Z \leq n]) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1.$$

$$8. (a) \quad P([Z = n]) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = 2 \times \underbrace{\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}_{p_1(1-p_1)^{n-1}} - \underbrace{\frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}}_{p_2(1-p_2)^{n-1}},$$

$$\Leftrightarrow P([Z = n]) = 2 \times P([X_1 = n]) - P([Y = n]) \text{ car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{16}{25}\right),$$

$$\Leftrightarrow nP([Z = n]) = 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]) \text{ par produit par } n.$$

(b) En sommant l'expression précédente, on retrouve les expressions des espérances.

$$nP([Z = n]) = 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]),$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Z \leq n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} [2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n])],$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Z \leq n]) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} nP([X_1 = n]) - \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Y = n]) \text{ par linéarité de la}$$

somme,

$$\Leftrightarrow E(Z) = 2E(X_1) - E(Y). \text{ Ainsi } E(Z) \text{ existe.}$$

$$\text{Or } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right), \text{ donc } E(X_1) = \frac{5}{2} \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{16}{25}\right), \text{ donc } E(Y) = \frac{25}{16}.$$

$$\text{Finalement, } E(Z) = 2E(X_1) - E(Y) = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = 5 - \frac{25}{16} = \frac{80}{16} - \frac{25}{16} = \frac{55}{16}.$$

# ESCP 2021 Corrigé

## Exercice 1

$$1) \text{ a) } J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

b) D'après la question précédente, un polynôme annulateur de  $J$  est :  $X^3 - 2X$ .

$$\text{Or } X^3 - 2X = X \underbrace{X^2 - 2}_{a^2 - b^2} = X \underbrace{X - \sqrt{2}}_{a-b} \underbrace{X + \sqrt{2}}_{a+b}.$$

Les valeurs propres possibles de  $J$  sont racines du polynôme annulateur.

Les valeurs propres possibles de  $J$  sont :  $0$ ,  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ .

$$\text{c) } \bullet \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } J \text{ et } -\sqrt{2} \text{ est la valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \quad J \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } J \text{ et } 0 \text{ est la valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } J \text{ et } \sqrt{2} \text{ est la valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$d) \quad J \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$P \times D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc  $JP = PD_1$ .

Il existe une matrice  $P$  constituée des vecteurs propres de  $J$  et une matrice diagonale construite à l'aide des valeurs propres associées telle que  $JP = PD_1$ .

Donc  $J$  est diagonalisable.

$$e) \quad J^2 P = J \quad JP = J \quad PD_1 = JPD_1 = JP \quad D_1 = PD_1 \quad D_1 = PD_1^2.$$

$$2) \quad a) \quad J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } J^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

$$b) \quad aI + bJ + cK = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \quad aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

$$A = aI + bJ + cK \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Par identification de la première ligne, il vient :  $a = 1$ ,  $b = 2$  puis  $c = 1$ .

Finalement,  $A = I + 2J + K$ .

$$c) \quad \text{D'après la question 2) a), } K = J^2 - I.$$

On en déduit :  $A = I + 2J + K \Leftrightarrow A = I + 2J + J^2 - I \Leftrightarrow A = J^2 + 2J$ .

Dès lors :

$$AP = J^2 + 2J \quad P = J^2 P + 2JP = PD_1^2 + 2PD_1 \text{ d'après la question 1),}$$

$$\Leftrightarrow \quad AP = P \quad D_1^2 + 2D_1.$$

On vérifie que :  $D_2 = D_1^2 + 2D_1$  est bien une matrice diagonale.

$$D_1^2 + 2D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3) a) 

```
import numpy as np
n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
A=np.array([[1,2,1],[2,2,2],[1,2,1]])
B=np.linalg.matrix_power(A,n)
print(B)
```

b) Il semble que l'élément central est le double du premier élément.

$$2 \times 656 = 1312, \text{ donc } A^5 = B_1.$$

Autre argument, toujours sans calculer  $A^5$ , mais en analysant seulement le terme central, on a :

$$A^5 = A^2 \times A^3 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 8 & 12 & 8 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dots & 40 & \dots \\ \dots & 56 & \dots \\ \dots & 40 & \dots \end{pmatrix}.$$

Le terme central est donc :  $8 \times 40 + 12 \times 56 + 8 \times 40$ .

Inutile de le calculer, il se termine par 2 (qui provient de l'unité de  $12 \times 56$ )

## Exercice 2

1) a) Par cours, la densité de la loi exponentielle est :  $g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$

converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ . Or, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

On en déduit :  $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$  converge et  $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ .

b) Par cours :  $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$  et  $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

c) Comme  $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$ , D'après la question précédente,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$

converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = \frac{1}{\lambda}$ . Or, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = \int_{-\infty}^0 x g(x) dx + \int_0^{+\infty} x g(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$



On en déduit :  $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$  converge et  $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ .

D'après la formule de Koëning-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 \Leftrightarrow E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2.$$

On a donc :  $E(Z^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$ . Or  $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx$ .

On en déduit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{2}{\lambda^2}$ .

Or, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 g(x) dx + \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

On en déduit :  $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$  converge et  $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$ .

2) a) Sous réserve de convergence et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} [\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}] dx, \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lambda(1-p) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx + \lambda^2 p \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

D'après la question 1),  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lambda(1-p) \times \frac{1}{\lambda} + \lambda^2 p \times \frac{1}{\lambda^2} = 1 - p + p = 1.$$

b) • La normalisation est acquise d'après la question précédente.

• De plus, par construction,  $f$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  et  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  par somme de fonctions continues sur  $]0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ et } f(0) = \lambda(1-p)e^0 + \lambda^2 p \times 0 \times e^0 = \lambda(1-p) \neq 0 \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } p \neq 1.$$

Conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0.

• Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f(x) = 0$  donc  $f$  y est positive.

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f$  est positive comme somme de deux termes positifs. En effet, une exponentielle est toujours positive,  $x \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  et  $1-p > 0$  car  $p \in ]0, 1[$ .

En définitive,  $f$  est bien une densité de probabilité.

c) Calculons, sous réserve de convergence,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} [\lambda(1-p)x e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x^2 e^{-\lambda x}] dx, \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \lambda(1-p) \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx + \lambda^2 p \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

D'après la question 1),  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  converge,  $X$  admet une espérance et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \cancel{\lambda}(1-p) \times \frac{1}{\cancel{\lambda}} + \cancel{\lambda^2} p \times \frac{2}{\cancel{\lambda^2}} = 1 - p + 2p = 1 + p.$$

3. a)  $\forall x \geq 0$ , intégrons par parties l'intégrale :  $\int_0^x t e^{-\lambda t} dt$ .

$t \mapsto t$  et  $t \mapsto e^{-\lambda t}$  sont continues et dérivables sur  $[0, x]$ .

On pose :  $u(t) = t$  et  $v'(t) = e^{-\lambda t}$ .

On a alors :  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t}$ .

On intègre par parties :  $\int uv' = [uv] - \int u'v$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= \left[ t \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x 1 \times \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t} dt, \\ \Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= \left( -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) - (0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda t} dt, \\ \Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} [e^{-\lambda t}]_0^x, \\ \Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda x} - e^0) = \frac{-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1}{\lambda^2}, \\ \Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= \frac{1 - e^{-\lambda x} (\lambda x + 1)}{\lambda^2}. \text{ On retrouve bien : } \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}). \end{aligned}$$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

$\forall x < 0$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

$\forall x \geq 0$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = F(0) + \int_0^x f(t) dt$  d'après la relation de Chasles.

Il vient :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 0 + \int_0^x (\lambda(1-p)e^{-\lambda t} + \lambda^2 p t e^{-\lambda t}) dt, \\
 \Leftrightarrow F(x) &= \lambda(1-p) \int_0^x e^{-\lambda t} dt + \lambda^2 p \int_0^x t e^{-\lambda t} dt \text{ par linéarité de l'intégrale,} \\
 \Leftrightarrow F(x) &= \lambda(1-p) \left[ \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x + \lambda^2 p \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1+\lambda x)e^{-\lambda x}) \text{ d'après la question 2),} \\
 \Leftrightarrow F(x) &= (1-p)(1-e^{-\lambda x}) + p(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}), \\
 \Leftrightarrow F(x) &= 1-e^{-\lambda x} - p + p e^{-\lambda x} + p - p e^{-\lambda x} - p \lambda x e^{-\lambda x}, \\
 \Leftrightarrow F(x) &= 1-e^{-\lambda x} - \lambda p x e^{-\lambda x}.
 \end{aligned}$$

### Exercice 3

1) a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right. .$$

On a donc bien  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ .  $f$  est continue à droite en 0.

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$  d'après la question précédente.

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  existe et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ .

$f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$ .

2) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$(1/x)' = -1/x^2$ ,  $(e^u)' = u'e^u$  et  $(u \times v)' = u'v + v'u$ . Il vient, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$f'(x) = 1 \times e^{-1/x} + (1/x^2) e^{-1/x} \times x = e^{-1/x} + (1/x) e^{-1/x} = e^{-1/x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

b)  $e^{-1/x} > 0$  et  $1 + \frac{1}{x} > 0$  car  $x > 0$ . On en déduit que  $f'(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis que

$f'(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ .  $f$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

c) On a déjà vu que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ . Déterminons la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1/x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$$

En résumé, on a :

|                         |           |           |
|-------------------------|-----------|-----------|
| $x$                     | 0         | $+\infty$ |
| $\text{variation.de.f}$ | $+\infty$ | 0         |

d)  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$(1/x)' = -1/x^2$ ,  $(e^u)' = u'e^u$  et  $(u \times v)' = u'v + v'u$ . Il vient, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \left[ \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \right],$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

$e^{-\frac{1}{x}} > 0$  et  $\frac{1}{x^3} > 0$  car  $x > 0$ . On en déduit que  $f''(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$f$  est donc convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $f$  est définie en 0.

3) a) Posons  $h(x) = e^{-x}$ .  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $h'(x) = -e^{-x}$ .

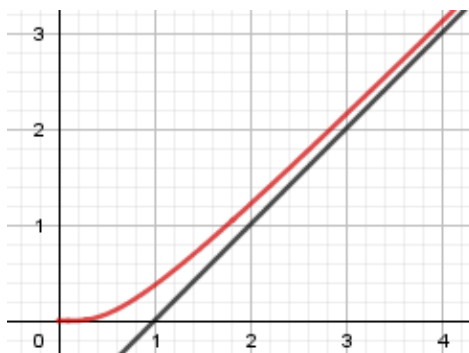
$$\text{Or, } \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{h(u) - h(0)}{u - 0} = h'(0) = -e^0 = -1.$$

b) Pour  $x > 0$ ,  $f(x) - (x-1) = x e^{-1/x} - x + 1 = x(e^{-1/x} - 1) + 1 = \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} + 1$ .

$$\text{Or, d'après la question précédente, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=1/x}} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -1.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = -1 + 1 = 0.$$

c) D'après la question précédente, la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote oblique à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .



4) a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n > 0$  :

- $u_0 = 1$ , donc  $u_0 > 0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n > 0$  montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$u_n > 0$$

$$\Leftrightarrow f(u_n) > f(0) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[ ,$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > 0 .$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n$  :

- $u_0 = 1$  et  $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} < 1$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_{n+1} \leq u_n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[ \text{ et que } u_n > 0 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ d'après la question précédente,}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1} .$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers un réel  $\ell$  qui vérifie  $\ell = f(\ell)$ .

0 est candidat puisque  $f(0) = 0$ .

$$\text{Si } x > 0, \quad f(x) = x \Leftrightarrow x e^{-1/x} = x \Leftrightarrow e^{-1/x} = 1 \text{ car } x \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow -1/x = 0 \text{ ce qui est impossible.}$$

Le seul point fixe de  $f$  étant 0 et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant convergente,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

d)

```
import numpy as np
n,u=0,1
while u>0.001:
 u=u*np.exp(-1/u)
 n+=1
print(n)
```

5) a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}$  :

- $\frac{1}{u_0} = 1 = -\ln e^{-1} = -\ln u_1$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{n+1}} = -\ln u_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}}. \text{ Or :}$$

$$-\ln u_{n+2} = -\ln(f(u_{n+1})) = -\ln(u_{n+1} e^{-1/u_{n+1}}) = -\ln(u_{n+1}) - \ln\left(e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}.$$

$$\text{En définitive, } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+2}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln u_{n+1} = +\infty$ .

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = +\infty$ . La série de terme général  $\frac{1}{u_n}$  est divergente.

## Exercice 4

1) a) L'événement  $(X_1 = 0)$  correspond à l'événement tirer deux boules blanches dans l'urne  $U_0$ . Les tirages ayant lieu successivement sans remise :

- le nombre de tirages possibles est :  $4 \times 3$
- le nombre de tirages favorables est :  $2 \times 1$

$$\text{On en déduit : } P(X_1 = 0) = \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

L'événement  $(X_1 = 2)$  correspond à l'événement tirer deux boules noires dans l'urne  $U_0$ . Les tirages ayant lieu successivement sans remise :

- le nombre de tirages possibles est :  $4 \times 3$
- le nombre de tirages favorables est :  $2 \times 1$

$$\text{On en déduit : } P(X_1 = 2) = \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Les événements  $(X_1 = 0)$ ,  $(X_1 = 1)$  et  $(X_1 = 2)$  constituent par construction un système complet d'événements.

$$\text{Donc } P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \quad E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2),$$

$$\Leftrightarrow E(X_1) = 0 + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

2) L'événement  $(X_n = 2)$  est réalisable si, et seulement si, deux boules noires ont été tirées à chaque étape précédente. On a donc :  $(X_n = 2) = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ .

$$\text{Par suite :} \quad P(X_n = 2) = P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}),$$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 2) = P(A_0) \times P(A_1) \times \dots \times P_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \text{ d'après la}$$

formule des probabilités composées,

Or la probabilité de tirer successivement sans remise deux boules noires dans une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches est  $\frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

$$\text{Il vient : } P(X_n = 2) = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \dots \times \frac{1}{6}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

3) a) Les événements  $(X_n = 0)$ ,  $(X_n = 1)$  et  $(X_n = 2)$  constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \\ + P(X_n = 2) \times P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1).$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0 \text{ car il est impossible d'avoir une boule noire dans l'urne } U_{n+1}$$

lorsqu'il n'y en a pas dans l'urne  $U_n$ .

Si  $(X_n = 1)$ , c'est à dire si l'urne  $U_n$  contient une boule noire et trois boules blanches, il faut tirer la boule noire :

- le nombre de cas possibles est  $4 \times 3$ ,
- le nombre de cas favorables est  $3 \times 1 + 1 \times 3$  selon si l'on tire la boule noire en premier ou en deuxième position.

$$\text{Donc } P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{3 \times 1 + 1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, si  $(X_n = 2)$ , c'est à dire si l'urne  $U_n$  contient deux boules noires et deux boules blanches, il faut tirer une seule boule noire :

- le nombre de cas possibles est toujours  $4 \times 3$ ,
- le nombre de cas favorables est  $2 \times 2 + 2 \times 2$  selon si l'on tire la boule noire en premier ou en deuxième position.

$$\text{Donc } P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{En définitive, on retrouve bien : } P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{2}{3} P(X_n = 2).$$

b) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

- $2\left(\frac{1}{2}\right)^1 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P(X_1 = 1)$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

D'après les questions précédentes :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2),$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow P(X_{n+1} = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

c)  $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1) - P(X_n = 2),$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 0) = 1 - \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] - \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 0) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 0) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

4)  $E(X_n) = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2),$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = 0 + 1 \times \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 0$ .



# ESC 2020 Corrigé

## Exercice 1

1. a) Soit  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Si  $ad - bc \neq 0$  alors  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

$$1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

$$\text{Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} P.$$

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , donc  $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$

$X^2 - 2X$  est bien un polynôme annulateur de la matrice  $A$ .

Or,  $X^2 - 2X = X(X - 2)$ . Donc 0 et 2 sont les racines de  $X^2 - 2X$ .

0 et 2 sont donc les valeurs propres possibles de  $A$ .

c)  $AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U.$

$U$  est vecteur propre non nul de  $A$  et 2 est la valeur propre associée.

$$AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0V.$$

$V$  est vecteur propre non nul de  $A$  et 0 est la valeur propre associée.

d)  $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $P^{-1}(AP) = C.$

$$\text{Ou bien : } P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } (P^{-1}A)P = C.$$

2. a)  $B = A + I_2$  et  $D = C + I_2.$

b) On en déduit :  $P^{-1}BP = P^{-1}(A + I_2)P = P^{-1}(AP + P) = P^{-1}AP + P^{-1}P = C + I_2 = D.$

3. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P^{-1}B^nP = D^n.$

Initialisation :

$$\text{Pour } n = 0, P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 = D^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$P^{-1}B^nP = D^n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

$$D^{n+1} = D^n \times D = P^{-1}B^nP \times P^{-1}BP = P^{-1}B^n(P \times P^{-1})BP = P^{-1}(B^n I_2 B)P = P^{-1}B^{n+1}P.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**b)**  $D$  est une matrice diagonale donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**c)**  $P^{-1}B^nP = D^n$ ,  
 $\Leftrightarrow P(P^{-1}B^nP)P^{-1} = PD^nP^{-1}$ ,  
 $\Leftrightarrow PP^{-1}B^nPP^{-1} = PD^nP^{-1}$ ,  
 $\Leftrightarrow I_2B^nI_2 = PD^nP^{-1}$ ,  
 $\Leftrightarrow B^n = PD^nP^{-1}$ .

Dès lors :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix} \text{ puis :}$$

$$(PD^n)P^{-1} = B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Ou bien :  $D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 3^n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  puis :

$$P(D^nP^{-1}) = B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 3^n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

**4. a)** Au début du jeu, Antoine a le service, donc  $a_1 = P(A_1) = \frac{2}{3}$  et  $b_1 = P(B_1) = \frac{1}{3}$ .

$A_1$  et  $B_1$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

**b)** On demande  $P_{A_2}(A_1)$ .

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{4}{5}.$$

**c)** Il s'agit de calculer  $a_{n+1} = P(A_{n+1})$ .

$A_n$  et  $B_n$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$

De même :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n.$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{3}BX_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n \\ a_n + 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

e) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$ .

Initialisation :

$$\text{Pour } n=1, \quad \frac{1}{3^{1-1}} B^{1-1} X_1 = \frac{1}{3^0} B^0 X_1 = \frac{1}{1} I_2 X_1 = X_1.$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} BX_n = \frac{1}{3} B \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} B \times B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^n} \times B^n X_1.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

f) Dès lors, pour  $n \geq 1$  :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1,$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times B^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 1 & 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 & 3^{n-1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Par identification des termes du haut, il vient :

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (3^{n-1} + 1) + \frac{1}{3} (3^{n-1} - 1) \right],$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{3} [2(3^{n-1} + 1) + 1(3^{n-1} - 1)],$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} [2 \times 3^{n-1} + 2 + 3^{n-1} - 1],$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2 \times 3^n} [3 \times 3^{n-1} + 1],$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}.$$

$$\text{On en déduit : } b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n} = \frac{2 \times 3^n - (3^n + 1)}{2 \times 3^n} = \frac{2 \times 3^n - 3^n - 1}{2 \times 3^n} = \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n}.$$

5. a) 5.        if a==1 : a=rd.binomial(1,2/3)  
               6.        else : a=rd.binomial(1,1/3)  
       b) 3.        S=0  
               7.        S=S+a

## Exercice 2

1. a)  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

b)  $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = +\infty$ . Par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

d) Étudions le signe de  $g'(x)$ .

$x > 0$ , donc  $g'(x)$  est du signe de  $x-1$ . Or  $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

On en déduit le tableau des variations de  $g$  :

| $x$                       | 0         | 1                             | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $\text{signe } g'(x)$     |           | -                             | +         |
| $\text{variations de } g$ | $+\infty$ | $\searrow$<br>1<br>$\nearrow$ | $+\infty$ |

e) D'après le tableau des variations de  $g$ , 1 est minimum sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $g(x) > 0$ .

2. a)  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  car son dénominateur ne s'annule pas.

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{\frac{x-1}{x}}{(x-\ln(x))^2} = -\frac{x-1}{x(x-\ln(x))^2} = \frac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

La courbe de  $f$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

c)  $f(1) = \frac{1}{g(1)} = \frac{1}{1} = 1.$

Étudions le signe de  $f'(x)$ .

$x > 0$  et  $(x - \ln(x))^2 > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x$ .

Or  $1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$ .

On en déduit le tableau des variations de  $f$ :

|                           |   |   |           |
|---------------------------|---|---|-----------|
| $x$                       | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\text{signe } f'(x)$     | + | 0 | -         |
| $\text{variations de } f$ | 0 | 1 | 0         |

3. a)  $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x - \ln(x)} = x \Leftrightarrow x - \ln(x) = \frac{1}{x}$  (par inverse)  $x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$ .

b)  $h$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$ .

$x^2 > 0$ , donc  $h'(x)$  est du signe de  $x^2 - x + 1$ .

Le discriminant de  $x^2 - x + 1$  est  $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ .

Donc  $x^2 - x + 1 > 0$ .

Finalement,  $h'(x) > 0$  et  $h$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

c) On déduit des questions précédentes le tableau des variations de  $h$ :

|                           |           |           |
|---------------------------|-----------|-----------|
| $x$                       | 0         | $+\infty$ |
| $\text{signe de } h'(x)$  | +         |           |
| $\text{variations de } h$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

d) •  $h$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

•  $h$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

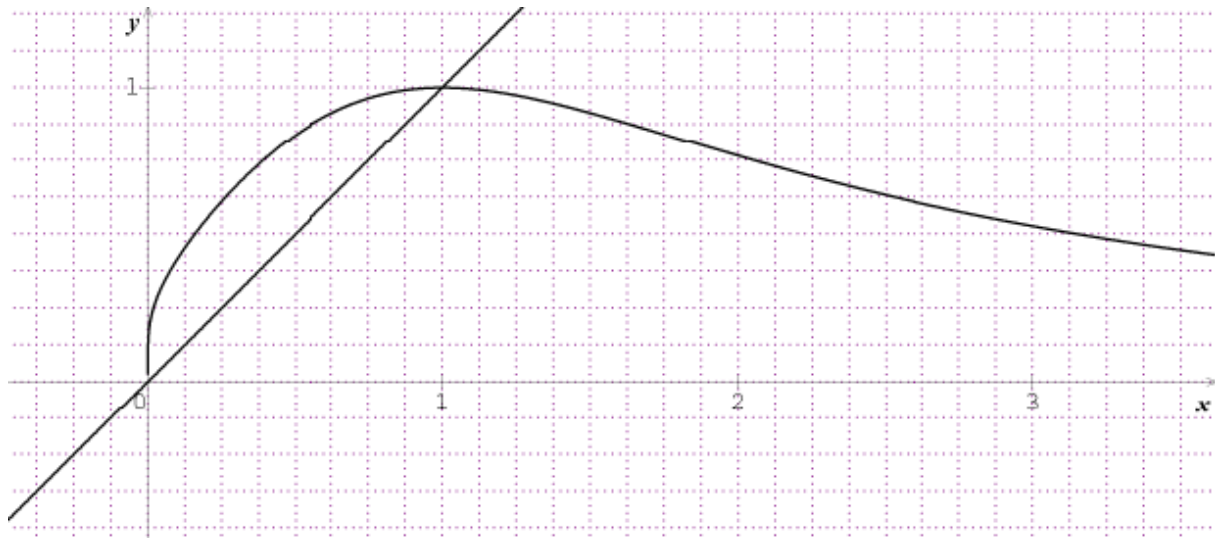
•  $0 \in h(]0; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$ .

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $h(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .

En définitive, l'équation  $f(x) = x$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .

De plus, on a vu que  $f(1) = 1$ . On en déduit que  $\alpha = 1$ .

4.



### Exercice 3

1. a) Il s'agit de 100 répétitions identiques et indépendantes d'une même épreuve à deux issues possibles :

- la cartouche est défectueuse, de probabilité 0,02,
- la cartouche n'est pas défectueuse, de probabilité 0,98.

$X$  compte le nombre de succès.

$X$  suit donc la loi binomiale de paramètres 100 et 0,02.

Dès lors :

$$X(\Omega) = 0; 100 \text{ et } \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{100}{k} \times 0,02^k \times 0,98^{100-k}.$$

b)  $E(X) = 100 \times 0,02 = 2$  et  $V(X) = 100 \times 0,02 \times 0,98 = 2 \times 0,98 = 1,96$ .

c) 2. `X=rd.binomial(100,0.02)`  
 3. `if X==0 : Y=rd.randint(1,101)`  
 4. `else : Y=X`

2. a)  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , donc  $E(X_i) = p$  et  $V(X_i) = p(1-p)$ .

b) Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = \frac{1}{n} \times n \times p = p.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad V(M_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \text{ car } V(aX) = a^2 V(X). \\ \Leftrightarrow V(M_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ car les variables } X_i \text{ sont indépendantes,} \\ \Leftrightarrow V(M_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) = \frac{1}{n^2} \times n \times p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned}$$

**d) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète ou à densité. Si  $X$  admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|X - E(X)| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Appliquons cette inégalité à  $M_n$  :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left[|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon\right]\right) &\leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}, \\ \Leftrightarrow P\left(\left[|M_n - p| \geq \varepsilon\right]\right) &\leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \\ \Rightarrow P\left(\left[|M_n - p| \geq \varepsilon\right]\right) &\leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \text{ car } \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**e)** D'après le cours, la probabilité que l'intervalle  $\left[M_n - \sqrt{\frac{V(X)}{na}}, M_n + \sqrt{\frac{V(X)}{na}}\right]$

contienne la moyenne  $E(X)$  est supérieure à  $1-a$ .

De plus, on peut majorer  $V$  par  $1/4$ .

Un intervalle de confiance pour  $p$  au risque  $a$  est donc :

$$\left[M_n - \sqrt{\frac{1}{4na}}, M_n + \sqrt{\frac{1}{4na}}\right] = [M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon].$$

## Exercice 4

1. a) Pour tout réel  $t$  de  $[0;1]$ , on a :  $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$ .
- b)  $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^1 = (1 - \ln(2)) - (0 - \ln(1)) = 1 - \ln(2)$ .
- c)  $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t} dt$  par linéarité de l'intégrale.
- $$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^n(t+1)}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$
- d) Pour  $n=1$  :  $I_2 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - (1 - \ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$ .
- Pour  $n=2$  :  $I_3 + I_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{5}{6} - \ln(2)$ .
2.  $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = 1 - \ln(2) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(2)} \times \frac{t}{1+t} dt = 1$ . On pose  $k = \frac{1}{1 - \ln(2)}$ .

Montrons que  $f$  est une densité de probabilité.

Continuité :

Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.

Sur  $]0; 1[$ ,  $f(t) = k \frac{t}{1+t}$ , donc  $f$  y est continue.

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.

En 0,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$ . Donc  $f$  est continue en 0.

En 1,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \frac{k}{2} \neq 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 0$ . Donc  $f$  n'est pas continue en 1.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 1.

Positivité :

Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est positive.

Sur  $]0; 1[$ ,  $f(t) = k \frac{t}{1+t}$ , donc  $f$  y est positive car  $k = 1 - \ln(2) > 0$ .

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est positive.

Normalisation :

Calculons, sous réserves de convergence,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ . D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 k \frac{t}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt,$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + k I_1 + 0 = \frac{1}{1 - \ln(2)} \times (1 - \ln(2)) = 1.$$



En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

3. a) Par définition,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

$$\text{Si } x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\text{Si } x > 1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - \int_x^{+\infty} f(t) dt = 1 - \int_x^{+\infty} 0 dt = 1 - 0 = 1.$$

b) Pour tout réel  $x$  de  $[0;1]$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x k \frac{t}{1+t} dt,$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0 + k \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = k \left[ t - \ln(1+t) \right]_0^x,$$

$$\Leftrightarrow F(x) = k \left[ (x - \ln(1+x)) - (0 - \ln(1+0)) \right] = k(x - \ln(1+x)).$$

4. a) Sous réserves de convergences,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ .

D'après la relation de Chasles :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} t f(t) dt,$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^1 k \frac{t^2}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} t \times 0 dt = 0 + k I_2 + 0,$$

$$\Leftrightarrow E(X) = k \left( \ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}.$$

b) Sous réserves de convergences,  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ .

D'après la relation de Chasles :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt + \int_0^1 t^2 f(t) dt + \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt,$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^0 t^2 \times 0 dt + \int_0^1 k \frac{t^3}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} t^2 \times 0 dt = 0 + k I_3 + 0,$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = k \left( \frac{5}{6} - \ln(2) \right) = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1 - \ln(2)}.$$

Donc  $V(X)$  existe et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1 - \ln(2)} - \left( \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)} \right)^2.$$

# Ecricome 2020 Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

1. for k in range(1,n+1):

$$w=u$$

$$u=v$$

$$v=7*v+8*w$$

2.  $s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$ .

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc la suite géométrique de raison 8 et de premier terme :

$$s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1. \text{ On en déduit : } s_n = s_0 \times 8^n = 8^n.$$

3. (a)  $t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1}$ . Or  $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$ .

$$\text{Il vient : } t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} = (-1)^n (u_n + u_{n+1}) = (-1)^n s_n.$$

(b) On en déduit que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $t_n = (-1)^n s_n = (-1)^n \times 8^n = (-1 \times 8)^n = (-8)^n$ .

4. (a) On a, pour  $q \neq 1$  :  $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ .

$$\text{Ainsi : } \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} = \frac{1 - (-8)^n}{1 + 8} = \frac{1 - (-8)^n}{9}.$$

(b) Par télescopage :  $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = v_0 - v_n = -v_n$  car  $v_0 = (-1)^0 u_0 = (-1)^0 \times 0 = 0$ .

(c) D'après les questions précédentes :  $-v_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i = \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1 - (-8)^n}{9}$ .

Finalement,  $v_n = \frac{(-8)^n - 1}{9}$ . On en déduit :

$$u_n = (-1)^n v_n = (-1)^n \frac{(-8)^n - 1}{9} = \frac{8^n - (-1)^n}{9} = \frac{8^n + (-1)^{n+1}}{9}.$$

## Partie B

1. Par calcul,  $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$ .

Il vient :  $M^2 - 7M - 8I = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} - 7 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$Q(X)$  est bien un polynôme annulateur de  $M$ .

2.  $M^2 - 7M - 8I = O \Leftrightarrow M^2 - 7M = 8I \Leftrightarrow M(M - 7I) = 8I$ .

$M$  est donc inversible et  $M^{-1} = \frac{1}{8}(M - 7I) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ .

3. (a)  $a_0M + b_0I = 0 \times M + 1 \times I = I = M^0$ .

(b)  $M = 1 \times M + 0 \times I = a_1M + b_1I$  en posant  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$ .

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^{n+1} = M^n \times M = (a_nM + b_nI) \times M = a_nM^2 + b_nM$ .

Or, d'après la question 1.,  $M^2 - 7M - 8I = O \Leftrightarrow M^2 = 7M + 8I$ .

Il vient :  $M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_nM$ .

Puis :  $M^{n+1} = 7a_nM + 8a_nI + b_nM = 7a_nM + b_nM + 8a_nI$ .

$\Leftrightarrow M^{n+1} = (7a_n + b_n)M + 8a_nI = a_{n+1}M + b_{n+1}I$

avec  $a_{n+1} = 7a_n + b_n$  et  $b_{n+1} = 8a_n$ .

(d) Montrons que,  $H_n : \ll a_n = u_n \gg$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$a_0 = 0$  et  $u_0 = 0$ , donc  $a_0 = u_0$  et  $H_0$  est vraie.

Montrons par récurrence que,  $H_n : \ll a_n = u_n \gg$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

•  $a_0 = 1$  et  $u_0 = 1$ , donc  $a_1 = u_1$ .  $H_1$  est vraie.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. On suppose que  $H_n$  est vraie jusqu'au rang  $n$ , montrons que  $H_{n+1}$  est vraie :

$a_{n+1} = 7a_n + b_n = 7a_n + 8a_{n-1}$  car  $b_{n+1} = 8a_n \Leftrightarrow b_n = 8a_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ ,

$\Leftrightarrow a_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$  par hypothèse de récurrence,

$\Leftrightarrow a_{n+1} = u_{n+1}$  par formule de récurrence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$H_{n+1}$  est vraie.

• Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

## Partie C

1. Pour que ce tableau représente effectivement une loi de couple, il est nécessaire que la somme de toutes les probabilités égale 1. On a donc :  $24\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{24}$ .

2.  $X$  et  $Y$  suivent la loi uniforme discrète sur  $\{1; 3\}$ .

On en déduit :  $E(X) = E(Y) = \frac{3+1}{2} = 2$ .

3. (a) 
$$E(XY) = \frac{2}{24} \times 1 \times 1 + \frac{3}{24} \times 1 \times 2 + \frac{3}{24} \times 1 \times 3 + \frac{3}{24} \times 2 \times 1 + \frac{2}{24} \times 2 \times 2 +$$

$$\frac{3}{24} \times 2 \times 3 + \frac{3}{24} \times 3 \times 1 + \frac{3}{24} \times 3 \times 2 + \frac{2}{24} \times 3 \times 3$$
$$\Leftrightarrow E(XY) = \frac{2}{24} + \frac{6}{24} + \frac{9}{24} + \frac{6}{24} + \frac{8}{24} + \frac{18}{24} + \frac{9}{24} + \frac{18}{24} + \frac{18}{24} = \frac{94}{24} = \frac{47}{12}.$$

On en déduit :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = \frac{47}{12} - 2 \times 2 = \frac{47}{12} - 4 = \frac{47}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{1}{12}.$$

(b)  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ . Les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

## EXERCICE 2

### Partie A

1. Le discriminant du polynôme  $x \mapsto x^2 + x + 1$  est égal à  $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ .

Il ne possède donc pas de racine et l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$  n'admet aucune solution.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

3. Déterminons les variations de  $f$ .

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{(1)(1+x+x^2) - (1+2x)(x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1+x+x^2-x-2x^2}{(1+x+x^2)^2},$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

$(1+x+x^2)^2 > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-x^2$ .

1 et  $-1$  sont racines évidentes de  $1-x^2$  et  $1-x^2$  est négatif à l'extérieur des racines.

On en déduit le signe de  $f'(x)$  puis les variations de  $f$ .

|                       |                                                          |      |     |     |           |
|-----------------------|----------------------------------------------------------|------|-----|-----|-----------|
| $x$                   | $-\infty$                                                | $-1$ |     | $1$ | $+\infty$ |
| $\text{signe } f'(x)$ | $-$                                                      | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $\text{var } f$       | $0 \rightarrow -1 \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow 0$ |      |     |     |           |

avec  $f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)+(-1)^2} = \frac{-1}{1-1+1} = -1$  et  $f(1) = \frac{1}{1+1+1^2} = \frac{1}{3}$ .

On vérifie bien que  $f$  est croissante sur  $[-1;1]$ .

4. (a)  $f(0) = \frac{0}{1+0+0^2} = 0$  et  $f'(0) = \frac{1-0^2}{(1+0+0^2)^2} = 1$ .

Une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1 \times (x-0) + 0 = x.$$

(b) Étudions le signe de la différence :

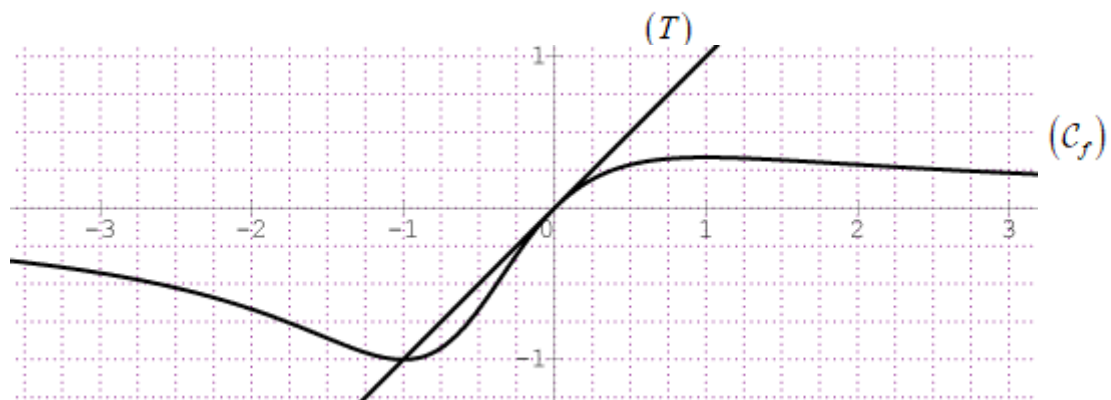
$$f(x) - x = \frac{x}{1+x+x^2} - x = \frac{x - x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} = \frac{x - x - x^2 - x^3}{1+x+x^2} = \frac{-x^2 - x^3}{1+x+x^2} = \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2}.$$

- $1+x+x^2 > 0$  car le discriminant du polynôme  $x \mapsto x^2 + x + 1$  est négatif.
- $1+x \geq 0$  car  $x \in [-1; +\infty[$ .
- $-x^2 \leq 0$ .

On en déduit  $\forall x \in [-1; +\infty[ : f(x) - x \leq 0$ , c'est-à-dire,  $f(x) \leq x$ .

Graphiquement, la courbe  $(C_f)$  est au-dessous de la tangente  $(T)$  sur  $[-1; +\infty[$ .

5.



## Partie B

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]} = \frac{1}{n + \frac{n}{n} + \frac{n}{n^2}} = \frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}}.$$

Comme  $\frac{1}{n} \geq 0$ , on a  $n + 1 + \frac{1}{n} \geq n + 1$ . Par inverse,  $\frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n + 1}$ .

2. Montrons par récurrence que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

- $u_1 = 1$ , donc  $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{1}$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$  :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n},$$

$$\Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [0; 1],$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \text{ car } f(0) = 0, f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Par théorème d'encadrement,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. u=1

n=1

while u>1/1000

u=f(u)

n+=1

print(n)

## Partie C

1. Montrons par récurrence que,  $\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0$ .

- $v_1 = -1$ , donc  $v_2 = \frac{v_1}{1+v_1+v_1^2} = \frac{-2}{1+(-2)+(-2)^2} = \frac{-2}{1-2+4} = -\frac{2}{3}$ .

$-1 \leq v_2 \leq 0$ . La propriété est vraie au rang 2.

- Soit  $n \geq 2$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $-1 \leq v_n \leq 0$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$-1 \leq v_n \leq 0,$$

$$\Leftrightarrow f(-1) \leq f(v_n) \leq f(0) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [-1; 0],$$

$$\Rightarrow -1 \leq v_{n+1} \leq 0 \text{ car } f(0) = 0, f(v_n) = v_{n+1} \text{ et } f(-1) = -1.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 2$ .

2. Il s'agit d'étudier le signe de  $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$ .

Or, d'après la question précédente,  $\forall n \geq 2, v_n \in [-1; 0]$  et, d'après la question 4. (b) de la partie A,  $\forall x \in [-1; +\infty[, f(x) \leq x$ .

On en déduit :  $\forall n \geq 2, f(v_n) \leq v_n$ . Finalement,  $f(v_n) - v_n \leq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n \leq 0$ .

La suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.

3. La suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  est convergente. Par suite, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

4. Par lecture graphique, il semble que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -1$ .

5. (a)  $f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x+x^2} = -1 \Leftrightarrow x = -(1+x+x^2) \text{ car } 1+x+x^2 > 0,$

$$\Leftrightarrow x = -1 - x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

L'équation  $f(x) = -1$  possède une seule solution :  $x = -1$ .

(b) Supposons que :  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $v_n = -1$ , d'une part,  $v_{n+1} = f(v_n) = -1$  et d'autre part,  $v_n = -1 \Leftrightarrow f(v_{n-1}) = -1 \Leftrightarrow v_{n-1} = -1$  d'après la question précédente.

En raisonnant de proche en proche (ou par récurrence),  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  serait constante.

Ce qui n'est pas.

On en déduit que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq -1$ .

### EXERCICE 3

1.  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $a$ .

La fonction de répartition est :  $F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La densité est :  $f(X) = \begin{cases} a e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . De plus,  $E(X) = \frac{1}{a}$  et  $V(X) = \frac{1}{a^2}$ .

2. (a) Le temps d'attente du client C est supérieur à une durée  $x$  si, et seulement si, les temps de prise en charge des clients A et B dépassent toutes les deux cette durée  $x$ .

$$[T > x] = [X > x] \cap [Y > x].$$

- (b)  $P([T > x]) = P([X > x] \cap [Y > x]) = P([X > x]) \times P([Y > x])$  par indépendance

$$\Leftrightarrow P([T > x]) = (1 - F(x)) \times (1 - F_Y(x)) \text{ où } F_Y \text{ est la fonction de répartition de } Y,$$

$$\Leftrightarrow P([T > x]) = \begin{cases} e^{-ax} \times e^{-bx} = e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (c) On en déduit :

$$P([T \leq x]) = 1 - P([T > x]) = \begin{cases} 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$T$  suit donc la loi exponentielle de paramètre  $a + b$ .

- (d) Il s'agit de calculer  $P_{[T \geq 2]}([T \geq 5])$ .

$P_{[T \geq 2]}([T \geq 5]) = P([T \geq 3]) = e^{-3(a+b)}$  car la loi exponentielle est la loi de durée de vie sans vieillissement.

3. (a) `for k in range(10000) :`

`T[k] = min(X[k], Y[k])`

- (b) La commande `plt.hist` construira un graphique avec regroupement en classe d'intervalles de temps. C'est lui qui est adapté. Les barres obtenues se superposeront avec la fonction exponentielle densité de  $T$ .

4. (a) La fonction `simul2` retourne la fréquence relative à un temps d'attente du client C supérieur à deux minutes.

- (b) La loi faible des grands nombres garantit ce phénomène.



5. (a)  $\int_0^A g(x) dx = \int_0^A x e^{-x} dx.$

Les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties.

On pose :  $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$  et  $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$ .

$$\int_0^A uv' = [uv]_0^A - \int_0^A u'v, \text{ donc :}$$

$$\int_0^A x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^A - \int_0^A 1 \times (-e^{-x}) dx = (-A e^{-A}) - (0) + \int_0^A e^{-x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^A x e^{-x} dx = -A e^{-A} + [-e^{-x}]_0^A = -A e^{-A} - e^{-A} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-A} - A e^{-A}$$

(b) Calculons  $\int_0^A x g(x) dx = \int_0^A x^2 e^{-x} dx.$

Les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties.

On pose :  $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$ .

$$\int_0^A uv' = [uv]_0^A - \int_0^A u'v, \text{ donc :}$$

$$\int_0^A x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^A - \int_0^A 2x \times (-e^{-x}) dx = (-A^2 e^{-A}) - (0) + \int_0^A 2x e^{-x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^A x^2 e^{-x} dx = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A g(x) dx = 2 - 2 e^{-A} - 2A e^{-A} - A^2 e^{-A}.$$

(c) ★ **Étude de la continuité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $g(x) = 0$ , donc  $g$  y est continue.
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) = x e^{-x}$ , donc  $g$  y est continue comme produit de fonctions continues.

$g$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf, peut-être en 0.

★ **Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $g(x) = 0$ , donc  $g(x) \geq 0$ .
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) = x e^{-x}$ , donc  $g(x) \geq 0$  par produit de termes positifs.

Finalement,  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ **Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$**

D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

Sous réserves de convergence,

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A} - A e^{-A}) = 1 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A e^{-A} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ .

En définitive,  $g$  est bien une densité de probabilité.

$$(d) \quad P(V \leq 2) = \int_{-\infty}^2 g(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^2 g(x) dx \text{ d'après la relation de Chasles,}$$

$$\Leftrightarrow P(V \leq 2) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 g(x) dx = 0 + 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}.$$

On en déduit :

$$P(V > 2) = 1 - P(V \leq 2) = 1 - (1 - 3e^{-2}) = 1 - 1 + 3e^{-2} = 3e^{-2}.$$

$$P(V > 2) \approx 3 \times 0,14 = 0,42.$$

Ce résultat est parfaitement cohérent avec les résultats Python de la question 4..

(e) Sous réserves de convergence :

$$E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = \int_{-\infty}^0 x g(x) dx + \int_0^{+\infty} x g(x) dx = 0 + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x g(x) dx,$$

$$\Leftrightarrow E(V) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x g(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2 - 2e^{-A} - 2Ae^{-A} - A^2e^{-A}) = 2$$

car  $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0$ ,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} Ae^{-A} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^2e^{-A} = 0$  par croissances comparées.

$V$  admet une espérance et  $E(V) = 2$ .

# ESCP 2020 Corrigé

## Exercice 1

1. a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ . On a :  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix}$ .

On en déduit :

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = \frac{9}{4} I.$$

b)  $A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4} I \Leftrightarrow A(A^2 - 3A) = \frac{9}{4} I.$

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{4}{9}(A^2 - 3A).$

c) `A=np.array([ [1,2,1], [1/2,1,2], [1,1/2,1] ])`

d) `4/9*(A.dot(A)-3*A)`

e) `np.linalg.inv(A)`

2) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 3, A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3} :$

- $A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4} I \Leftrightarrow A^3 = 3A^2 + \frac{9}{4} A^0$ . La propriété est vraie au rang 3.
- Soit  $n \geq 3$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A \times \left( 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3} \right) = 3A^n + \frac{9}{4}A^{n-2}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 3$ .

```

import numpy as np
n=int(input('entrer une valeur pour n : '))
I=np.eye(3)
A=np.array([[1,2,1],[1/2,1,2],[1,1/2,1]])
B=A.dot(A)
for k in range(n-2):
 C=3*B+(9/4)*I
 I=A
 A=B
 B=C
print(B)

```

3. a) Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors elle est racine d'un polynôme annulateur de  $A$ .

$$\text{Or, } A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4}I \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I = 0.$$

Donc  $X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4}$  est polynôme annulateur de  $A$  et  $\lambda$  en est une racine, c'est-à-

$$\text{dire : } \lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0.$$

b)  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ .

0 et 2 sont racines évidentes du trinôme du second degré  $f'(x)$ .

Par suite,  $f'(x)$  est positif à l'extérieur des racines.

De plus, par règle du monôme de plus haut degré,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ , et

$$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} \text{ et } f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - \frac{9}{4} = 8 - 12 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4}.$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$ :

| $x$             | $-\infty$ | 0              | 2               | $+\infty$ |   |
|-----------------|-----------|----------------|-----------------|-----------|---|
| $signed f'(x)$  | +         | 0              | -               | 0         | + |
| $variationsdef$ | $-\infty$ | $-\frac{9}{4}$ | $-\frac{25}{4}$ | $+\infty$ |   |

c) Sur l'intervalle  $]-\infty ; 2]$ ,  $-\frac{9}{4}$  est maximum. Donc l'équation  $f(x) = 0$  ne possède pas de solution sur  $]-\infty ; 2]$ .

Sur  $[2 ; +\infty[$  :

- $f$  est continue
- $f$  est strictement croissante
- $0 \in f([2 ; +\infty[) = \left[-\frac{25}{4} ; +\infty\right[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique sur  $[2; +\infty[$ .

Finalement, l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique sur  $\mathbb{R}$ .

Si on suppose que  $A$  est diagonalisable,  $A$  ne possède qu'une seule valeur propre puisque  $f(x)$  ne possède qu'une seule racine  $\lambda_0$ .

Enfin :

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - \frac{9}{4} = 27 - 27 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} < 0 \text{ et } f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - \frac{9}{4} = 64 - 48 - \frac{9}{4} > 0.$$

Donc  $\lambda_0$  est compris entre 3 et 4.

$$\begin{aligned} 4. \text{ a) } \quad & A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I = O, \\ \Leftrightarrow & P^{-1} \left( A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I \right) P = P^{-1} \times O \times P, \\ \Leftrightarrow & P^{-1}A^3P - 3P^{-1}A^2P - \frac{9}{4}P^{-1}P = O, \\ \Leftrightarrow & D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = O. \end{aligned}$$

Posons  $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ . D'après l'égalité ci-dessus,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont racines de  $f$ .

$$\text{On en déduit : } D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I.$$

$$\text{b) D\`es lors, } A = PDP^{-1} = P(\lambda_0 I)P^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} = \lambda_0 I.$$

Ce qui est faux.

On en déduit que  $A$  n'est pas diagonalisable.

## Exercice 2

1. Les lancers étant équiprobables,  $X$  et  $Y$  suivent la même loi.

On effectue des répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- on obtient pile (face), de probabilité  $1/2$ ,
- on obtient face (pile), de probabilité  $1/2$ .

$X$  ( $Y$ ) est le temps d'attente du premier succès.  $X$  ( $Y$ ) suit donc la loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, P(X = k) = P(Y = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}.$$

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ et } V(X) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$

2. Il n'est pas possible d'avoir *à la fois* pile au premier lancer et face au premier lancer.

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \emptyset, \text{ donc } P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0.$$

$$\text{Or, } P([X = 1]) \times P([Y = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

3. a) L'événement  $[Y = j]$  signifie que l'on a obtenu pour la première fois face au  $j$ -ième lancer, ce qui signifie qu'on a nécessairement obtenu pile au premier lancer.

On a donc  $[X = 1] \subset [Y = j]$ , donc  $[X = 1] \cap [Y = j] = [Y = j]$  puis :

$$P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j).$$

- b) De la même façon, l'événement  $[X = i]$  signifie que l'on a obtenu pour la première fois pile au  $i$ -ième lancer, ce qui signifie qu'on a nécessairement obtenu face au premier lancer.

On a donc  $[Y = 1] \subset [X = i]$ , donc  $[X = i] \cap [Y = 1] = [Y = 1]$  puis :

$$P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(Y = 1).$$

- c) Notons que  $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$  pour tout  $j$ ,  $\forall i \geq 2$  et que  $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$  pour tout  $i$ ,  $\forall j \geq 2$ .

La loi de couple  $(X, Y)$  est donc donnée par :

|         | $X = 1$                              | $X = 2$                              | ... | $X = n$                              | ... |
|---------|--------------------------------------|--------------------------------------|-----|--------------------------------------|-----|
| $Y = 1$ | <b>1, 0</b>                          | <b>2, <math>\frac{1}{2^2}</math></b> | ... | <b><math>n, \frac{1}{2^n}</math></b> | ... |
| $Y = 2$ | <b>2, <math>\frac{1}{2^2}</math></b> | <b>4, 0</b>                          | 0   | <b><math>2n, 0</math></b>            | ... |
| .       | .                                    | 0                                    | 0   | 0                                    | .   |
| .       | .                                    | 0                                    | 0   | 0                                    | .   |
| .       | .                                    | 0                                    | 0   | 0                                    | .   |
| $Y = n$ | <b><math>n, \frac{1}{2^n}</math></b> | <b><math>2n, 0</math></b>            | 0   | <b><math>n^2, 0</math></b>           | ... |
| ...     | ...                                  | ...                                  | ... | ...                                  | ... |

On a associé en gras la valeur  $XY$  associée. Ainsi,  $XY(\Omega) = \mathbb{N} - \{0; 1\}$ .

Comme une valeur de  $XY$  peut être obtenue de deux façons (selon si  $X = 1$  ou  $Y = 1$ ), la loi de  $XY$  est donc :

|             |                          |     |                          |     |
|-------------|--------------------------|-----|--------------------------|-----|
| $XY = k$    | 2                        | ... | $n$                      | ... |
| $P(XY = k)$ | $2 \times \frac{1}{2^2}$ | ... | $2 \times \frac{1}{2^n}$ | ... |

C'est-à-dire,

|             |               |     |                     |     |
|-------------|---------------|-----|---------------------|-----|
| $XY = k$    | 2             | ... | $n$                 | ... |
| $P(XY = k)$ | $\frac{1}{2}$ | ... | $\frac{1}{2^{n-1}}$ | ... |

d) Sous réserves de convergences,

$$E(XY) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée.

$$E(XY) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

e) On en déduit :  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = 3 - 2 \times 2 = -1.$

$$\text{Puis : } V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

4. a) Reprenons la loi de couple  $(X, Y)$  en associant en gras la valeur  $X + Y$  :

|         |                                        |                                      |     |                                        |     |
|---------|----------------------------------------|--------------------------------------|-----|----------------------------------------|-----|
|         | $X = 1$                                | $X = 2$                              | ... | $X = n$                                | ... |
| $Y = 1$ | 0                                      | <b><math>3, \frac{1}{2^2}</math></b> | ... | <b><math>n+1, \frac{1}{2^n}</math></b> | ... |
| $Y = 2$ | <b><math>3, \frac{1}{2^2}</math></b>   | 0                                    | 0   | 0                                      | ... |
| .       | .                                      | 0                                    | 0   | 0                                      | .   |
| .       | .                                      | 0                                    | 0   | 0                                      | .   |
| .       | .                                      | 0                                    | 0   | 0                                      | .   |
| $Y = n$ | <b><math>n+1, \frac{1}{2^n}</math></b> | 0                                    | 0   | 0                                      | ... |
| ...     | ...                                    | ...                                  | ... | ...                                    | ... |

Ainsi,  $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} - \{0; 1; 2\}.$

Comme une valeur de  $X + Y$  peut être obtenue de deux façons (selon si  $X = 1$  ou  $Y = 1$ ), la loi de  $X + Y$  est donc :

|                |                          |     |                          |     |
|----------------|--------------------------|-----|--------------------------|-----|
| $X + Y = k$    | 3                        | ... | $n + 1$                  | ... |
| $P(X + Y = k)$ | $2 \times \frac{1}{2^2}$ | ... | $2 \times \frac{1}{2^n}$ | ... |

C'est-à-dire,

|                |               |     |                     |     |
|----------------|---------------|-----|---------------------|-----|
| $X + Y = k$    | 3             | ... | $n$                 | ... |
| $P(X + Y = k)$ | $\frac{1}{2}$ | ... | $\frac{1}{2^{n-2}}$ | ... |

b) D'après ce qui précède,

|                 |               |     |                     |     |
|-----------------|---------------|-----|---------------------|-----|
| $XY = k - 1$    | 2             | ... | $n$                 | ... |
| $XY + 1 = k$    | 3             | ... | $n + 1$             | ... |
| $P(XY + 1 = k)$ | $\frac{1}{2}$ | ... | $\frac{1}{2^{n-1}}$ | ... |

Les variables  $X + Y$  et  $XY + 1$  suivent la même loi.

5.  $x=0$   
 $y=0$   
 $y=y+1$   
 $x=x+1$

### Exercice 3

1. a)  $1 \leq t \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ . En particulier,  $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$ .

Dès lors :  $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x},$

$$\Leftrightarrow \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x},$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e^t}{x} dt = \frac{1}{x} \int_1^x e^t dt = \frac{1}{x} [e^t]_1^x,$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}.$$



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{e}{x} \right) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  par croissances comparées et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$ . Par théorème de comparaison (minoration),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

c) La fonction  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est définie et continue sur  $[1; +\infty[$ .

La fonction  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$  est donc dérivable et  $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ .

d)  $f'$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de fonctions continues.

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f''(x) = \frac{(e^x)'(x) - (1)(e^x)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Sur  $[1; +\infty[$ , les trois facteurs  $e^x$ ,  $x^2$  et  $(x-1)$  sont positifs donc  $f''(x) \geq 0$ .

Par suite,  $f$  est convexe sur  $[1; +\infty[$ .

e)  $f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt = 0$  et  $f'(1) = \frac{e^1}{1} = e$ .

L'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) + 0 = ex - e.$$

2. a)  $g$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de fonctions continues.

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$\text{Donc } g'(t) = \frac{(e^t)'(t^3) - (3t^2)(e^t)}{(t^3)^2} = \frac{t^3 e^t - 3t^2 e^t}{t^6} = \frac{t^2 e^t (t-3)}{t^6} = \frac{e^t (t-3)}{t^4}.$$

Sur  $[1; +\infty[$ , les deux facteurs  $e^t$  et  $t^4$  sont positifs.  $g'(t)$  est donc du signe de  $t-3$ .

$t-3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$ . On en déduit le signe de  $g'(t)$  puis les variations de  $g$ .

| $t$                  | 1 | 3 | $+\infty$ |
|----------------------|---|---|-----------|
| <i>signedeg'(t)</i>  | - | 0 | +         |
| <i>variationsdeg</i> |   |   |           |

$$g(1) = \frac{e^1}{1^3} = e, \quad g(3) = \frac{e^3}{3^3} = \frac{e^3}{27} \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

b) D'après le tableau de variation de  $g$ ,  $\forall t \in [1; 3]$  :

$$\frac{e^3}{27} \leq g(t) \leq e \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{e^3}{27} dt \leq \int_1^3 g(t) dt \leq \int_1^3 e dt \text{ par intégration.}$$

$$\text{Or, } \int_1^3 \frac{e^3}{27} dt \geq 0 \text{ par positivité de l'intégrale et } \int_1^3 g(t) dt \leq \int_1^3 e dt = [et]_1^3 = 3e - 1e = 2e.$$

$$\text{Finalement, on a bien : } 0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e.$$

c) D'après le tableau de variation de  $g$ ,  $\forall t \in [3; +\infty[$ ,  $g(t) \geq \frac{e^3}{27}$ .

$$\text{Donc } \int_3^x g(t) dt \geq 0 \text{ par positivité.}$$

$$\text{Par ailleurs, } \forall t \in [3; x], \frac{e^t}{t^3} \leq \frac{e^x}{x^3} \text{ car la fonction } g \text{ est croissante sur } [3; +\infty[.$$

$$\text{Par intégration, il vient : } \int_3^x g(t) dt \leq \int_3^x \frac{e^x}{x^3} dt = \frac{e^x}{x^3} \int_3^x dt = \frac{e^x}{x^3} [t]_3^x = \frac{e^x}{x^3} (x - 3).$$

$$\text{En définitive, } 0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

3. a) Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{t}$  et  $t \mapsto e^t$  sont continues et dérivables sur  $[1, +\infty[$ .

On intègre par parties.

$$\text{On pose : } u(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow u'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ et } v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t.$$

$$\int_1^x uv' = [uv]_1^x - \int_1^x u'v, \text{ donc :}$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^t dt = \left[ \frac{1}{t} e^t \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^t dt = \frac{e^x}{x} - \frac{e^1}{1} + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

b) Intégrons par parties :  $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$ .

$$\text{Les fonctions } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ et } t \mapsto e^t \text{ sont continues et dérivables sur } [1, +\infty[.$$

On intègre par parties.

$$\text{On pose : } u(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow u'(t) = -\frac{2}{t^3} \text{ et } v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t.$$

$$\int_1^x uv' = [uv]_1^x - \int_1^x u'v, \text{ donc :}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} e^t dt = \left[ \frac{1}{t^2} e^t \right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{t^3} e^t dt = \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^1}{1^2} + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

$$\text{Finalement, } f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

4. a) D'après la question 2. b), on a :  $0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$

D'après la question 2. c), on a :  $0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x$ .

Par somme, on a :  $0 + 0 \leq \int_1^3 g(t) dt + \int_3^x g(t) dt \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x$ .

C'est-à-dire, d'après la relation de Chasles :  $0 \leq \int_1^x g(t) dt \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x$ .

Dès lors, pour tout réel  $x$  de  $[1; +\infty[$  :

$$0 \leq \int_1^x g(t) dt \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x,$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \int_1^x g(t) dt \leq 4e + \frac{2(x-3)}{x^3} e^x,$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 4e + \frac{2(x-3)}{x^3} e^x,$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2e + \frac{2(x-3)}{x^3} e^x.$$

b) Multiplions les trois membres de l'inégalité précédente par  $x e^{-x} > 0$ , il vient :

$$1 + \frac{1}{x} - 2e x e^{-x} \leq x e^{-x} f(x) \leq 1 + \frac{1}{x} + 2e x e^{-x} + \frac{2(x-3)}{x^2}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  par règle du monôme de plus haut degré,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$  par croissances comparées.

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} - 2e x e^{-x} \right) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + 2e x e^{-x} + \frac{2(x-3)}{x^2} \right) = 1$ .

Par théorème d'encadrement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} f(x) = 1$ .

## Exercice 4

1. a) D'après l'énoncé, si  $A_{i-1} = i-1$ , le mobile avance à l'instant suivant sur l'abscisse  $i$  avec la probabilité  $\frac{i}{i+1}$  ou se retrouve sur l'origine avec la probabilité  $\frac{1}{i+1}$ .

On a donc  $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1}$  et  $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}$ .

- b) Le mobile se retrouve pour la première fois en 0 à l'instant  $k$  s'il était à l'instant  $k-1$  sur l'abscisse  $k-1$  et qu'il se retrouve en 0 à l'instant  $k$ .

Donc  $(U = k) = (A_1 = 1) \cap (A_2 = 2) \cap \dots \cap (A_{k-1} = k-1) \cap (A_k = 0)$ .

- c) Par formule des probabilités composées,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(U = k) = P(A_1 = 1) \times P_{(A_1=1)}(A_2 = 2) \times \dots \times P_{(A_1=1) \cap (A_2=2) \cap \dots \cap (A_{k-1}=k-1)}(A_{k-1} = k-1) \\ \times P_{(A_1=1) \cap (A_2=2) \cap \dots \cap (A_{k-1}=k-1) \cap (A_k=0)}(A_k = 0)$$

$$\Leftrightarrow P(U = k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

- d)  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$

Dès lors :  $\sum_{k=1}^n P(U = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$  par télescopage.

On en déduit, sous réserves de convergence :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(U = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

- e) Or,  $P(U = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1$ . On en déduit :  $P(U = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1 - 1 = 0$

2.  $P(U \leq n) = \sum_{k=0}^n P(U = k) = \sum_{k=1}^n P(U = k)$  car  $P(U = 0) = 0$ ,

$$\Leftrightarrow P(U \leq n) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par télescopage.}$$

On en déduit :  $P(U > n) = 1 - P(U \leq n) = 1 - \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$

3. hasard != 1

hasard = rd.randint(1, k+2)

4. a) ★ **Étude de la continuité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ , donc  $f$  y est continue (car définie).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0.

★ **Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ **Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$**

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sous réserves de convergence :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{A+1} \right) = 1.$$

$$\text{On a donc bien } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

b) La fonction de répartition de  $T$  est définie par :  $F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

$$\text{Si } x < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

Si  $x \geq 0$  : d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

Dès lors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[ -\frac{1}{t+1} \right]_0^x = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

5. a)  $T$  prend les valeurs dans  $[0 ; +\infty[$ , donc  $\lfloor T \rfloor$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On en déduit que  $N = \lfloor T \rfloor + 1$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{Enfin, } P(n-1 \leq T < n) = P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(N = n).$$

b) Dès lors,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(N = n) = P(n-1 \leq T < n) = F(n) - F(n-1)$ ,

$$\Leftrightarrow P(N = n) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \text{ car } n \geq 1 \text{ et } n-1 \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow P(N = n) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)},$$

$$\Leftrightarrow P(N = n) = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

c) Le script Python donne une simulation de  $U$  or, d'après la question précédente,  $U$  et  $N$  suivent la même loi. Le script Python donne donc une simulation de  $N$ .

6. a)  $\forall t \in [k ; k+1], k \leq t \leq k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$

Par intégration,  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \left[ \frac{t}{k} \right]_k^{k+1} = \frac{k+1}{k} - \frac{k}{k} = \frac{1}{k}.$

b) Sous réserve de convergence,

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - 1.$$

On reconnaît la série harmonique, qui diverge.

$N$  ne possède donc pas d'espérance.

# ESC 2019 Corrigé

## Exercice 1

### Partie I

1. Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

$$\star \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^n + 3(3^n - 2^n) \\ 0 & 3^{n+1} & 3^n + n3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^n + 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & 3^n + n3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & 3^n(1+n) \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. a) i.

$$\text{b) Pour tout entier naturel } n : AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

c) 3. `A=np.array([[2,0,1],[0,3,1],[0,0,3]])`

4. `X=np.array([[2],[0],[1]])`

6. `X=A.dot(X)`

d) Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .

★  $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ . La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $X_n = A^n X_0$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{e) Dès lors, } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$$

Par identification,  $a_n = 3^n + 2^n$  et  $b_n = n3^{n-1}$ .

3. a)  $PQ = I$  donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = Q$ .

$$\text{b) On trouve } PM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ puis } PMQ = A.$$

c) Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = P^{-1} A^n P$ .

★  $P^{-1} A^0 P = P^{-1} P = I = M^0$ . La propriété est vraie au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $M^n = P^{-1} A^n P$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

Notons que :

$$PMP^{-1} = A \Leftrightarrow PMP^{-1}P = AP \Leftrightarrow PM = AP \Leftrightarrow P^{-1}PM = P^{-1}AP \Leftrightarrow M = P^{-1}AP$$

Dès lors :

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1} A^n (P \times P^{-1}) AP = P^{-1} (A^n A) P = P^{-1} A^{n+1} P.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

★ D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On en déduit le calcul de  $M^n$  :

$$A^n \times P = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 3^n & 0 & 3^n - 2 \cdot 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$Q(A^n P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n - 3^n & 0 & 3^n - 2 \cdot 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}.$$



Ou bien :

$$Q \times A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \cdot 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$(QA^n)P = \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \cdot 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. a)  $b_{k+1} - b_k - 3^k = 3b_k + 3^k - b_k - 3^k = 2b_k.$

b) Par cours,  $\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$

c) C'est du cours, on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1} - 0 = b_{n+1}.$$

d) D'après 4.a) :  $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$ , donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2b_k &= \sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k - 3^k) \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n b_k &= \sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^n 3^k \text{ par linéarité de } \sum \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n b_k &= b_{n+1} - \sum_{k=0}^n 3^k \text{ d'après 4.c)} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n b_k &= b_{n+1} - \frac{3^{n+1} - 1}{2} = b_{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{3^{n+1}}{2} \text{ d'après 4.b)} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n k 3^{k-1} &= (n+1)3^n + \frac{1}{2} - \frac{3^{n+1}}{2} \text{ par définition de } b_n \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k 3^{k-1} &= \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4} \text{ (on a divisé par 2)} \end{aligned}$$

## Exercice 2

$$1. \bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array}.$$

L'axe des abscisse (la droite d'équation  $y = 0$ ) est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

$$2. a) \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1. \text{ Finalement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1.$$

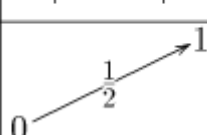
La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

$$3. a) \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (\text{avec } u(x) = e^x \text{ et } v(x) = 1 + e^x)$$

$$f'(x) = \frac{(e^x)(1+e^x) - (e^x)(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{(e^x)(1 + \cancel{e^x} - \cancel{e^x})}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

- b) •  $e^x > 0$  car une exponentielle est toujours strictement positive.  
 •  $(1+e^x)^2 > 0$  car une exponentielle est toujours strictement positive et qu'un carré est positif.

On en déduit que  $f'(x) > 0$ . Finalement, on a :

|         |                                                                                     |     |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                           | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$                                                                                 |     | $+$       |
| $f$     |  |     |           |

$$\text{Avec } f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$c) \bullet f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet f'(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

- L'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

4. •  $e^x > 0$  car une exponentielle est toujours strictement positive.  
 •  $(1+e^x)^3 > 0$  car une exponentielle est toujours strictement positive.

$f''(x)$  est donc du signe de  $1-e^x$ .

$1-e^x \geq 0 \Leftrightarrow -e^x \geq -1 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$  car  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

En définitive :

|          |           |     |           |
|----------|-----------|-----|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $+$       | $0$ | $-$       |

Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f$  est convexe, sur  $]0; +\infty[$ ,  $f$  est concave et  $f$  admet en 0 un point d'inflexion.

5.



6. a)  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$  (avec  $u(x) = 1+e^x$ ), donc  $h'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x)$ .

$h$  est une primitive de  $f$ .

b) Sous réserves de convergence :

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} [h(x)]_B^0 = \lim_{B \rightarrow -\infty} [h(0) - h(B)],$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} [\ln(1+e^0) - \ln(1+e^B)] = \lim_{B \rightarrow -\infty} [\ln 2 - \ln(1+e^B)].$$

Or,  $\lim_{B \rightarrow -\infty} e^B = 0$ .  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  est donc convergente et  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \ln 2 - \ln(1) = \ln 2$ .

### Exercice 3

1.  $F$  et  $\bar{F}$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_1) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1) + P(F) \times P_F(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. a) D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\bar{F}}(R_1) \times P_{\bar{F} \cap R_1}(R_2) = \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = 1.$$

$F$  et  $\bar{F}$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) + P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$

b) On cherche  $P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})$ .  $P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{1/2}{7/12} = \frac{6/12}{7/12} = \frac{6}{7}.$

3. a) **Question neutralisée : erreur d'énoncé**

On est sûr d'être dans l'urne n°2 à partir du moment où on tire une boule blanche.

Dans le pire des cas, les deux premières boules sont rouges. Puis, selon l'urne, si la troisième boule est rouge alors on se trouve dans l'urne n°1 et si la troisième boule est blanche, on se trouve dans l'urne n°2. Finalement,  $Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ .

- b) On est sûr d'être dans l'urne n°2 si on tire une boule blanche immédiatement. Ce qui signifie au passage qu'on a obtenu Face. Donc  $(Y=1) = F \cap B_1$ .

On en déduit :  $P(Y=1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$

- c) On est sûr d'être dans l'urne n°2 à partir du moment où une boule blanche est obtenue la première fois. Dès lors,  $(Y=2) = F \cap R_1 \cap B_2$ .

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(Y=2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- d) **Question neutralisée : erreur d'énoncé**

Comme  $Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $P(Y=3) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12-3-2}{12} = \frac{7}{12}$

- e) **Question neutralisée : erreur d'énoncé**

Finalement,  $E(Y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{3+4+21}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}.$

#### Exercice 4

1. a)  $\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 n t^{n-1} dt = \left[ n \frac{t^n}{n} \right]_0^1 = [t^n]_0^1 = 1^n - 0^n = 1.$

b) ★ Étude de la continuité

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f_n(t) = 0$ , donc  $f_n$  y est continue.
- Sur  $]0 ; 1[$ ,  $f_n(t) = n t^{n-1}$ , donc  $f_n$  y est continue.
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f_n(t) = 0$ , donc  $f_n$  y est continue.

Finalement,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en peut-être en 0 et 1.

★ Étude de la positivité

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f_n(t) = 0$ , donc  $f_n(t) \geq 0$ .
- Sur  $[0 ; 1]$ ,  $f_n(t) = n t^{n-1}$ , donc  $f(t) \geq 0$  (car  $n > 0$ ).
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f_n(t) = 0$ , donc  $f_n(t) \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} 0 dt.$$

C'est-à-dire,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1$  d'après la question précédente.

En définitive,  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. a) Par définition,  $F_n(x) = P(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$

Si  $x < 0$ ,  $F_n(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$

Si  $x > 1$ , d'après la relation de Chasles,

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^x f_n(t) dt$$

$$\Leftrightarrow F_n(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^x 0 dt$$

$$\Leftrightarrow F_n(x) = 0 + \int_0^1 f_n(t) dt + 0 = 1 \text{ d'après la question 1.a).}$$

b) Pour tout réel  $x \in [0; 1]$ , d'après la relation de Chasles,

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x n t^{n-1} dt$$

$$\Leftrightarrow F_n(x) = 0 + \left[ n \frac{t^n}{n} \right]_0^x = x^n.$$

3. Par définition,  $E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ .

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_{-\infty}^0 t f_n(t) dt + \int_0^1 t f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} t f_n(t) dt, \\ \Leftrightarrow E(X_n) &= \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^1 t \times n t^{n-1} dt + \int_1^{+\infty} t \times 0 dt \\ \Leftrightarrow E(X_n) &= 0 + \int_0^1 n t^n dt + 0 = \left[ n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

4. a)  $\max(U_1, U_2)$  est inférieur à un nombre si, et seulement si, chacune des variables  $U_1$  et  $U_2$  sont, elles-mêmes, inférieures à ce nombre.

Donc  $P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])$ .

Dès lors, par indépendance,

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x]) = P(U_1 \leq x) \times P(U_2 \leq x) \\ \Leftrightarrow H(x) &= F(x) \times F(x) = (F(x))^2 \\ \Leftrightarrow H(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La densité de  $Z$  est donc :  $\begin{cases} h(x) = H'(x) = 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ h(x) = H'(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

On a donc pour tout  $x$  réel  $h(x) = f_2(x)$ .  $Z$  et  $X_2$  suivent donc la même loi.

$$\text{b) } P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right) = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$P\left(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$P_{\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)}\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\left(Z \geq \frac{1}{3}\right) \cap \left(Z \leq \frac{1}{2}\right)\right)}{P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)} = \frac{5/36}{8/9} = \frac{5}{36} \times \frac{9}{8} = \frac{5}{32}.$$

c) 5.  $Z = U_1$

7.  $Z = U_2$

5. **a)**  $G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(-\ln(X_n) \leq x) = P(\ln(X_n) \geq -x) = P(X_n \geq e^{-x}) = 1 - F_n(e^{-x})$ .

**b)**  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1$ .

Si  $e^{-x} > 1$  alors  $F_n(e^{-x}) = 1$  d'après la question **2.a)**, donc si  $x < 0$ ,  $G_n(x) = 1 - 1 = 0$ .

**c)** Si  $x \geq 0$ , alors  $e^{-x} \in [0; 1]$ . Donc d'après la question **2.b)**,  $F_n(e^{-x}) = (e^{-x})^n = e^{-nx}$ .

Donc si  $x \geq 0$ ,  $G_n(x) = 1 - e^{-nx}$ .

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $n$ .

Finalement,  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$ .

**d)** Par cours,  $E(Y_n) = \frac{1}{n}$  et  $V(Y_n) = \frac{1}{n^2}$ .

# Ecricome 2019 Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

$$1. \quad A \times U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0+0 \\ 2-4+0 \\ 0-2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times U. \quad U \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à}$$

la valeur propre 1.

$$A \times V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0+0 \\ 0-2+0 \\ 0-1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times V. \quad V \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à}$$

la valeur propre 2.

$$A \times W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0+0 \\ 0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times W. \quad W \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à la}$$

valeur propre 3.

$$2. \quad P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = P$ .

3. (a) Calculons  $P^{-1}AP = PAP$  :

$$A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$P \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

Ou bien :

$$P \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$



(b) Remarquons tout d'abord que  $D = PAP \Leftrightarrow PDP = P^2AP^2 \Leftrightarrow PDP = A$

Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, A^n = PD^nP$  :

- $PD^0P = PIP = P^2 = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$A^n = PD^nP$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP \times PD^nP = PDP^2D^nP = PDID^nP = PD^{n+1}P.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(c)  $D$  est une matrice diagonale donc  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Calculons  $A^n = PD^nP$ .

$$D^n \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 \times 2^n & -2^n & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 \times 2^n & -2^n & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2 \times 2^n & 2^n & 0 \\ 1 - 2 \times 2^n + 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

Comme  $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ , finalement :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}$ .

Ou bien :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2 \times 2^n & 2^n & 0 \\ 1 - 2 \times 2^n + 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix} \dots$$

## Partie B

1 (a) À la réception du 1<sup>er</sup> bon, une seule formule a été choisie. Donc  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$  et  $c_1 = 0$

(b) À la réception du 2<sup>e</sup> bon, soit la même formule a été choisie deux fois ( $A_1 \cap A_2$ ) soit une autre formule a été choisie ( $A_1 \cap B_2$ ).

D'après la formule des probabilités composées :

$a_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  (car il y a une chance sur trois de choisir la même formule que la première fois)

$$b_2 = P(B_2) = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$c_2 = 0$  car il n'est pas possible que trois formules aient été choisies après réception de deux bons seulement.

(c) Pour tout entier naturel  $k$  non nul on a, d'après l'énoncé :

$$P_{A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P_{A_k}(C_{k+1}) = 0$$

$$P_{B_k}(A_{k+1}) = 0 \quad ; \quad P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P_{B_k}(C_{k+1}) = \frac{1}{3}$$

$$P_{C_k}(A_{k+1}) = 0 \quad ; \quad P_{C_k}(B_{k+1}) = 0 \quad ; \quad P_{C_k}(C_{k+1}) = 1$$

2. (a) Les événements  $A_k$ ,  $B_k$  et  $C_k$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(A_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(A_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{1}{3} a_k$$

$$P(B_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(B_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow b_{k+1} = \frac{2}{3} a_k + \frac{2}{3} b_k$$

$$P(C_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(C_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(C_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(C_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow c_{k+1} = \frac{1}{3} b_k + c_k$$

Finalement :

$$M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \times a_k \\ 2/3 \times a_k + 2/3 \times b_k \\ 1/3 \times b_k + c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$  :

- $M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ . La propriété est vraie au rang 1.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

**3 (a)** En définitive :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}A\right)^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, d'après la **partie A**,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n & 0 \\ 3^n-2^{n+1}+1 & 3^n-2^n & 3^n \end{pmatrix}$ .

Donc  $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1}-2^n+1 & 3^{n-1}-2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$ .

On a donc :  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1}-2^n+1 & 3^{n-1}-2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n-2 \\ 3^{n-1}-2^n+1 \end{pmatrix}$ .

On a donc bien :  $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ c_n = \frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}} = 1 - \frac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{cases}$ .

**(b)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-1} = +\infty$ .

$$b_n = \frac{2^n-2}{3^{n-1}} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \text{ car } \left|\frac{2}{3}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{1}{3}\right| < 1.$$

Comme par définition,  $a_n + b_n + c_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$ .

Ce résultat était bien entendu prévisible puisque plus on reçoit de bons, plus il est probable que les trois formules aient été choisies.

**(c)** Le script calcule les valeurs de  $c_n$  tant que ces derniers sont strictement inférieurs à 0,95.  $c_{11}$  est donc le premier terme de la suite  $(c_n)$  qui dépasse 0,95.

## EXERCICE 2

### 1. (a)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} (2x-1) = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) = -\infty \end{array} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0}} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \end{array}$$

La courbe représentative de  $g$  admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

### (b)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) = 0 \end{array} \quad \text{On en déduit :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array}.$$

### 2. Étudions le sens de variation de $g$ sur $]0; +\infty[$ .

$$g(x) = 2x - 1 + \ln(x) - \ln(x+1) \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

$$\text{Donc } g'(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1) + x + 1 - x}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} \quad (\text{formule : } (\ln u)' = \frac{u'}{u}).$$

- $x > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$
- $x+1 > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$
- $g'(x)$  est donc du signe de  $2x^2 + 2x + 1$  dont le discriminant est  $2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$   
 $g'(x)$  est donc du signe de 2, donc  $g'(x) \geq 0$

En définitive,  $g$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |           |
| $g$     | $-\infty$ | $+\infty$ |

3. (a) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (2x-1)] = 0$ .

On en déduit que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote à  $(C)$ .

(b) Étudions le signe de  $g(x) - (2x-1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $x+1 > x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1) = 0$ .

On en déduit que  $(C)$  est en dessous de  $(D)$  sur  $]0; +\infty[$ .

4. (a) •  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

•  $g$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

•  $g$  est strictement croissante sur  $0 \in g(]0; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$ .

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ .

(b) `y=2*x-1+np.log(x/(x+1))`

`>0.01`

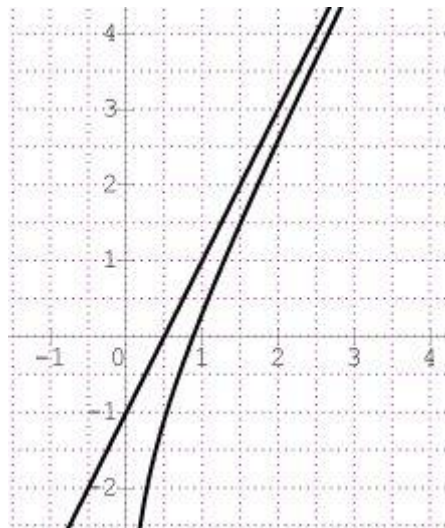
`m=(a+b)/2`

`b=m`

`a=m`

`print(a,b)`

5.



**6 (a)**  $(2x-1)-g(x)=-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$

On pose :  $u'(x)=-1$   $v(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln(x)-\ln(x+1)$  sur  $]0;+\infty[$

$$u(x)=-x \quad v'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

On intègre par parties :  $\int u'v = uv - \int uv'$

$$\int_1^2 ((2x-1)-g(x))dx = \left[ -x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 ((2x-1)-g(x))dx = -\ln(2) - 2\ln(2) + 2\ln(3) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 ((2x-1)-g(x))dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

On en déduit :

$$\int_1^2 ((2x-1)-g(x))dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + [\ln(x+1)]_1^2$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 ((2x-1)-g(x))dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \ln(3) - \ln(2) = 3\ln(3) - 4\ln(2).$$

**(b)** Graphiquement, l'aire de la partie du plan comprise entre  $(C)$ ,  $(D)$  et les droites d'équation  $x=1$  et  $x=2$  est égale à  $3\ln(3) - 4\ln(2)$  unité d'aire.

**7. (a)** Le vecteur  $u$  est :  $(u_1, u_2, \dots, u_{50})$

On en déduit que le vecteur  $S$  est :  $(u_1, u_1 + u_2, \dots, u_1 + u_2 + \dots + u_{50})$ .

D'après le graphique, il semble que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = +\infty$ .

**(b)** 
$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} [(2k-1)-g(k)] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[ -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \right] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[ \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ .

### EXERCICE 3

1. (a) Sur  $]-\infty ; 2[$ ,  $f(x) = 0$ . Donc  $f$  est continue sur  $]-\infty ; 2[$ .

Sur  $]2 ; +\infty[$ ,  $f(x) = e^{2-x}$ . Donc  $f$  est continue sur  $]2 ; +\infty[$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{2-x} = e^0 = 1 \end{array} \right\} f \text{ n'est pas continue en } 2$$

En définitive,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 2.

(b)  $f$  n'est pas continue en 2. Donc elle n'y est pas dérivable.

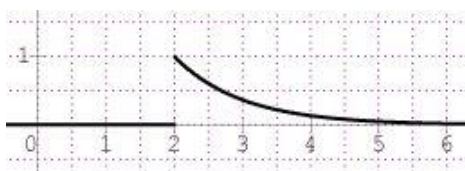
(c) Sur  $]2 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = -e^{2-x} < 0$ .  $f$  est donc strictement décroissante sur  $]2 ; +\infty[$ .

(d)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = 0 \end{array}.$$

La droite d'équation  $y = 0$  est donc asymptote horizontale à la courbe de  $f$ .

(e)



2. (a) Sous réserves de convergences,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{a-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A e^{a-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{a-t}]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{a-A}) = 1$$

$$\text{car } \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{a-A}) = 0.$$

$$\text{Finalement, } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est convergente et } \int_a^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

(b) Étudions la continuité de  $f$ :

Sur  $]-\infty ; a[$ ,  $f(x) = 0$ . Donc  $f$  est continue sur  $]-\infty ; a[$ .

Sur  $]a ; +\infty[$ ,  $f(x) = e^{a-x}$ . Donc  $f$  est continue sur  $]a ; +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en  $a$ .

Étudions la positivité de  $f$ :

Sur  $]-\infty ; a[$ ,  $f(x) = 0$ . Donc  $f$  est positive sur  $]-\infty ; a[$ .

Sur  $]a ; +\infty[$ ,  $f(x) = e^{a-x}$ . Donc  $f$  est positive sur  $]a ; +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  :

$$\text{D'après la relation de Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + 1 = 1$$

d'après la question précédente.

En définitive,  $f$  est bien une densité de probabilité.

3. (a)  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

Si  $x \in ]-\infty; a[$ ,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$

Si  $x \in [a; +\infty[$ , d'après la relation de Chasles :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x e^{a-t} dt$$

$$\Leftrightarrow F_X(x) = 0 + \left[ -e^{a-t} \right]_a^x = e^{a-a} - e^{a-x} = 1 - e^{a-x}.$$

Finalement,  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x \geq a \end{cases}.$

(b) Si  $x < a$   $F_X(x) = 0 < 0,5$ . La médiane est donc supérieure à  $a$ .

On résout alors l'équation :  $F_X(x) = 0,5$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{a-x} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow -e^{a-x} = -0,5$$

$$\Leftrightarrow e^{a-x} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow a - x = \ln(0,5) = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow -x = -\ln(2) - a$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) + a$$

(c)  $P_{(X \geq a+1)}(X \geq a+2) = \frac{P[(X \geq a+1) \cap (X \geq a+2)]}{P(X \geq a+1)} = \frac{P(X \geq a+2)}{P(X \geq a+1)} = \frac{1 - F(a+2)}{1 - F(a+1)}$

$$\Leftrightarrow P_{(X \geq a+1)}(X \geq a+2) = \frac{e^{a-(a+2)}}{e^{a-(a+1)}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}.$$

4 (a)  $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq a + x) = F_X(a + x).$

On en déduit :  $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a + x < a \Leftrightarrow x < 0 \\ 1 - e^{a-(a+x)} = 1 - e^{-x} & \text{si } a + x \geq a \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases}.$

(b) On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

(c) Par cours,  $E(Y) = 1$  et  $V(Y) = 1$ .

Par ailleurs,  $E(Y) = E(X - a) = E(X) - a$  par linéarité de l'espérance.

$$\text{D'où } E(X) = E(Y) + a = 1 + a.$$

$$\text{De plus, } V(Y) = V(X - a) = 1^2 V(X) = V(X) = 1.$$



5. (a)  $E(S_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (E(X_k) - 1)$  par linéarité de l'espérance.

Or, pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(X_k) = 1 + a$ . Il vient :

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + a - 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + a - 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a = \frac{1}{n} \times na = a.$$

(b)  $V(S_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n (X_k - 1)\right)$  car  $V(kX) = k^2 V(X)$ .

$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k - 1)$  car les variables  $X_k - 1$  sont mutuellement indépendantes.

Or, pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $V(X_k - 1) = V(X_k) = 1$ . Il vient :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}.$$

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

(c) `a=float(input())`  
`Y=rd.exponential(1,50)`  
`X=Y+a`  
`S=1/50*np.sum(X-1) ou np.mean(X-1)`

# ESCP 2019 Corrigé

## EXERCICE 1

$$\begin{aligned}
 1. \quad u_1 &= \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}. \\
 v_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \\
 u_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}. \\
 v_2 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad u &= 0 \\
 v &= 1 \\
 &\dots \\
 u &= 0.5 * (u + v) \\
 v &= 0.5 * (u + v)
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ a) Pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n - 2u_n) = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2} w_n.$$

$$\text{b) } w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) - \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n - u_n - v_n)$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n). \text{ Or, d'après la question précédente, } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

$$\text{En définitive, } w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n.$$

$(w_n)$  est donc la suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$  et de premier terme

$$w_0 = v_0 - u_0 = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{c) (i) D'après la question précédente, pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\text{Dès lors, pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} w_k = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right). \text{ On reconnaît une somme télescopique.}$$

$$\text{Finalement, } u_n - u_0 = u_n = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right).$$

$$(iii) \text{ Pour } n=0, \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^0 \right) = \frac{2}{3} (1-1) = 0 = u_0.$$

$$d) -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0. \text{ On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

$$e) u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + v_n) \Leftrightarrow 2u_{n+1} = u_n + v_n \Leftrightarrow v_n = 2u_{n+1} - u_n.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v_n &= 2u_{n+1} - u_n = 2 \times \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) - \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{2}{3} \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1 + \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] \\ \Leftrightarrow v_n &= \frac{2}{3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} + \left( \frac{1}{4} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

$$-1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} = 0. \text{ On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2}{3}.$$

4. a) Pour que la série de terme général  $t_n$  converge il est nécessaire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ .

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}. \text{ Par suite, } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{9}{8} \left( \alpha - \frac{2}{3} \right). \text{ Nécessairement, } \alpha = \frac{2}{3}.$$

Par ailleurs, si  $\alpha = \frac{2}{3}$ , la série de terme général  $t_n$  converge puisque la série géométrique de terme général  $u_n$  converge.

$$b) \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, u_n = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbf{N},$$

$$t_n = \frac{9}{8} (\alpha - u_n) = \frac{9}{8} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) \right) = \frac{9}{8} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{9}{8} \times \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^n = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^n.$$

On en déduit :  $t_n \geq 0$  (petite erreur d'énoncé).

$$\text{Enfin, } \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \frac{9}{8} \left( \alpha - \left( -\frac{2}{9} \right) \right) = \frac{9}{8} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \right) = \frac{9}{8} \left( \frac{6}{9} + \frac{2}{9} \right) = \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^n = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = \frac{3}{4} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$$

5. a) Pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $P([Y = n]) = P([X + 1 = n]) = P([X = n - 1]) = t_{n-1}$ .

Dès lors,  $P([Y = n]) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  qui est de la forme  $p(1-p)^{n-1}$ .

$Y$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{3}{4}$ .

b) Comme  $Y = X + 1$ ,  $X = Y - 1$ .

Par linéarité,  $E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{3/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ .

De plus,  $V(X) = V(Y) = \frac{1 - 3/4}{(3/4)^2} = \frac{1/4}{9/16} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$ .

## EXERCICE 2

1. a)  $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$M^4 = (M^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

b)  $M^4 = I \Leftrightarrow M \times M^3 = I$ .  $M$  est inversible et  $M^{-1} = M^3$ .

c) `M=np.array([[ -1, -1, -1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])`

`N=np.linalg.inv(M) ou M.dot(M).dot(M)`

2. a)  $M - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Démontrons que  $M - I$  est inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{aligned}$$

Les pivots de la réduite de Gauss sont non nuls, donc  $M - I$  est inversible.

**b)**  $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I) = M^4 + M^3 + M^2 + M - M^3 - M^2 - M - I = M^4 - I = O.$

Comme  $M - I$  est inversible :

$$(M - I)(M^3 + M^2 + M + I) = O$$

$$\Leftrightarrow (M - I)^{-1}(M - I)(M^3 + M^2 + M + I) = (M - I)^{-1} \times O$$

$$\Leftrightarrow M^3 + M^2 + M + I = O.$$

**c)**  $M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$M^3 + M^2 + M + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**3. a)** Soit  $x \in \mathbf{R}$ ,  $(x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1.$

D'après la question **2. b)**,  $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$  est polynôme annulateur de  $M$ .

Or,  $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$

Comme  $x^2 + 1 > 0$ , 1 et  $-1$  sont les seules racines de ce polynôme annulateur.

Comme  $M \neq I$ ,  $-1$  est la seule valeur propre possible de  $M$ .

$M$  possède au plus une valeur propre.

**b)**  $MU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -U.$

$U$  est vecteur propre non nul de  $M$  associé à la valeur propre  $-1$ .

$M$  possède donc comme unique valeur propre  $-1$ .

**4. a)**  $xM^2 + yM + zI = x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow xM^2 + yM + zI = \begin{pmatrix} -y+z & -y & x-y \\ -x+y & -x+z & -x \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

De même,  $x'M^2 + y'M + z'I = \begin{pmatrix} -y'+z' & -y' & x'-y' \\ -x'+y' & -x'+z' & -x'' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}.$

Par égalité des deux dernières expressions, et identification des dernières lignes, on obtient :  $x = x'$ ,  $y = y'$  et  $z = z'$ .

b) Démontrons par récurrence que :

$$\forall n \geq 0, M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I \text{ avec } \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ a_{n+1} = -a_n \end{cases}.$$

L'unicité du triplet est garantie par la question précédente.

- $M^0 = I = 0M^2 + 0M + 1I$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$M^{n+1} = M \times M^n = M(a_n M^2 + b_n M + c_n I) = a_n M^3 + b_n M^2 + c_n M$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = a_n (-M^2 - M - I) + b_n M^2 + c_n M$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = -a_n M^2 - a_n M - a_n I + b_n M^2 + c_n M$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = (b_n - a_n) M^2 + (c_n - a_n) M - a_n I$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = a_{n+1} M^2 + b_{n+1} M + c_{n+1} I$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

5.  $a=b-u$

$b=c-u$

$c=-u$

### EXERCICE 3

1. a)  $u_1 = P(B_1) = 1$  car au jour 1, il fait beau.

b) D'après l'énoncé :  $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{4}{5}$  et  $P_{\bar{B}_n}(B_{n+1}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ .

2. a)  $B_n$  et  $\bar{B}_n$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\bar{B}_n) \times P_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow P(B_{n+1}) = u_n \times \frac{4}{5} + v_n \times \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n + \frac{3}{5} v_n.$$

b)  $u_n = P(B_n)$  et  $v_n = P(\bar{B}_n)$ , donc  $u_n + v_n = 1 \Leftrightarrow v_n = 1 - u_n$ . On en déduit :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n + \frac{3}{5} v_n = \frac{4}{5} u_n + \frac{3}{5} (1 - u_n) = \frac{4}{5} u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} u_n = \frac{1}{5} u_n + \frac{3}{5}.$$

c)  $(u_n)$  est donc une suite arithmético-géométrique.

$$\text{Déterminons son point fixe : } x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

On pose  $w_n = u_n - x = u_n - \frac{3}{4}$ . Montrons que  $(w_n)$  est une suite géométrique.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}u_n + \frac{12}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5}w_n.$$

$(w_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  et de premier terme  $w_1 = u_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

$$\text{On en déduit la formule explicite de } w_n : w_n = w_1 \times b^{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Finalement, } u_n = w_n + x = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}.$$

d)  $-1 < \frac{1}{5} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ . On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}$ .

Les jours passant, la probabilité qu'il fasse beau tend vers 0,75.

3. a)  $B_n$  et  $\bar{B}_n$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\bar{B}_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(\bar{B}_{n+1}) + P(\bar{B}_n) \times P_{\bar{B}_n}(\bar{B}_{n+1}) \\ \Leftrightarrow P(\bar{B}_{n+1}) &= u_n \times \frac{1}{5} + v_n \times \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow v_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n. \end{aligned}$$

b) On a  $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \end{cases}$ . On pose  $K = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ .

$$X_n K = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n & \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = X_1 K^n$ .

*Probable maladresse de l'énoncé, l'initialisation pouvant se faire à 0.*

- $X_1 K^1 = X_1 K = X_2 = X_{1+1}$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$X_{n+1} = X_1 K^n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$X_{n+2} = X_{n+1} K = X_1 K^n \times K = X_1 K^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

**d) Question très difficile**

Notons  $K^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ .  $X_{n+1} = X_1 K^n \Leftrightarrow (u_{n+1} \ v_{n+1}) = (1 \ 0) \times \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = (a_n \ b_n)$ .

Par identification :  $\begin{cases} a_n = u_{n+1} \\ b_n = v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \\ b_n = 1 - u_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{cases}$  d'après la question 2. c.

De plus,  $X_{n+1} = X_2 K^{n-1}$  avec  $X_2 = X_1 K = (1 \ 0) \times \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = (4/5 \ 1/5)$ . Dès lors :

$$X_{n+1} = X_2 K^{n-1} \Leftrightarrow (u_{n+1} \ v_{n+1}) = (4/5 \ 1/5) \times \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} = \left( \frac{4}{5} a_{n-1} + \frac{1}{5} c_{n-1} \quad \frac{4}{5} b_{n-1} + \frac{1}{5} d_{n-1} \right).$$

Par identification :  $\begin{cases} \frac{4}{5} a_{n-1} + \frac{1}{5} c_{n-1} = u_{n+1} \\ \frac{4}{5} b_{n-1} + \frac{1}{5} d_{n-1} = v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{n-1} = 5u_{n+1} - 4a_{n-1} \\ d_{n-1} = 5v_{n+1} - 4b_{n-1} \end{cases}$ .

Finalement :

$$c_{n-1} = 5u_{n+1} - 4a_{n-1} = 5 \left( \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \right) - 4 \left( \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow c_{n-1} = \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{15}{4} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 3 = \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 3$$

$$\Leftrightarrow c_{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{12}{4} = -\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}.$$

C'est-à-dire :  $c_n = -\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}$ .

Puis  $d_n = 1 - c_n = 1 - \left( -\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$ .

En définitive,  $K^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ -\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

**4. a)**  $P(U_n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$

$\Leftrightarrow P(U_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$  d'après la formule des probabilités composées,

$\Leftrightarrow P(U_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_{n-1}}(B_n)$  car  $P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = P_{B_{n-1}}(B_n)$  par construction



$$\Leftrightarrow P(U_n) = 1 \times \underbrace{\frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5}}_{n-1 \text{ fois}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

b) l'événement contraire de  $V_n$  est constitué :

- de l'événement « il fait mauvais temps les  $n$  jours » ; cet événement est impossible puisqu'il fait beau le premier jour,
- des événements « il fait beau un seul jour » ; il y a qu'un seul événement de ce type puisqu'il fait beau le premier jour, c'est :  $B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n}$ .

Finalement,  $1 - P(V_n) = P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n})$

$$\Leftrightarrow 1 - P(V_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(\overline{B_2}) \times \dots \times P_{B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n}) \text{ d'après la}$$

formule des probabilités composées,

$$\Leftrightarrow 1 - P(V_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(\overline{B_2}) \times \dots \times P_{B_1}(\overline{B_n}) \text{ par construction,}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(V_n) = 1 \times \frac{1}{5} \times \underbrace{\frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5}}_{n-2 \text{ fois}} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow P(V_n) = 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}.$$

## EXERCICE 4

1. a) Formule :  $\left(-\frac{1}{u}\right)' = \frac{u'}{u^2}$  car  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ .

Donc pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $g'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ .

b) Pour tout  $x \geq 0$ ,  $I(x) = \int_0^x g'(t) dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ .

c) Sous réserves de convergence,  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{1+x^2} = 1$ .

### ★ Étude de la continuité

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ , donc  $f$  y est continue (car définie).

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf, peut-être en 0.

★ **Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .
- Sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ , donc  $f(t) \geq 0$  car  $t \geq 0$  et un carré est toujours

positif.

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ **Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$**

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + 1 = 0 + 1 = 1 \text{ d'après le début de la question c.}$$

En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

2.  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Si  $x < 0$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $x \geq 0$  : d'après la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + I(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

3. a) D'après ce qui précède, pour  $x \geq 0$ ,  $Q(x) = I(x)$ . Donc  $Q'(x) = I'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ .

Donc  $Q'(x) \geq 0$  car  $x \geq 0$  et un carré est toujours positif.

De plus,  $Q(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ .

On en déduit :

|                        |   |           |
|------------------------|---|-----------|
| $x$                    | 0 | $+\infty$ |
| <i>signe.de.Q'(x)</i>  | + |           |
| <i>variations.de.Q</i> | 0 | 1         |

Si  $x \geq 0$  alors  $0 \leq Q(x) < 1$ . Or  $Y = Q(X)$ . Donc  $Y(\Omega) = [0 ; 1[$ .

**b)** Pour tout  $y \in [0 ; 1[$ ,  $G(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X^2}{1+X^2} \leq y\right) = P(X^2 \leq y(1+X^2))$

$$\Leftrightarrow G(y) = P(X^2 \leq y + yX^2) = P(X^2 - yX^2 \leq y)$$

$$\Leftrightarrow G(y) = P((1-y)X^2 \leq y) = P\left(X^2 \leq \frac{y}{1-y}\right) \text{ car } 1-y > 0$$

$$\Leftrightarrow G(y) = P\left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)$$

$$\Leftrightarrow G(y) = \frac{\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2} - 0 \text{ car } -\sqrt{\frac{y}{1-y}} < 0 \text{ et } F\left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow G(y) = \frac{\frac{y}{1-y}}{1 + \frac{y}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1-y+y}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1}{1-y}} = \frac{y}{1-y} \times \frac{1-y}{1} = y.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur  $[0 ; 1[$ .

**c)**  $\frac{X^2}{1+X^2} = Y \Leftrightarrow X^2 = Y(1+X^2) \Leftrightarrow X^2 = Y + YX^2 \Leftrightarrow X^2 - YX^2 = Y$

$$\Leftrightarrow X^2(1-Y) = Y \Leftrightarrow X^2 = \frac{Y}{1-Y} \Leftrightarrow X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{Y}{1-Y}}.$$

Or,  $X \geq 0$ , donc  $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}.$

Finalement :  $Y = \text{rd.random}()$   
 $X = (Y / (1-Y)) ^ 0.5$

**4. a)**  $\forall x > 0, \quad T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X > x]}([X \leq x+h]) = \frac{1}{h} \times \frac{P([X > x] \cap [X \leq x+h])}{P([X > x])}$

$$\Leftrightarrow T_h(x) = \frac{1}{h} \times \frac{P([x < X \leq x+h])}{P([X > x])} = \frac{1}{h} \times \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$\Leftrightarrow T_h(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \times \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Or,  $F$  étant dérivable,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x).$

Finalement,  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$

$$\text{b) Pour } x > 0, \quad T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{2x}{(1+x^2)^2 \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \frac{2x}{(1+x^2)^2 \left(\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow T(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\text{c) Pour } x > 0, \quad \int_0^x T(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \left[ \ln(1+t^2) \right]_0^x \quad (\text{forme } \frac{u'}{u})$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x T(t) dt = \ln(1+x^2) - \ln(1) = \ln(1+x^2).$$

$$\text{Par ailleurs, } \int_0^x T(t) dt = \int_0^x \frac{f(t)}{1-F(t)} dt = \int_0^x \frac{F'(t)}{1-F(t)} dt \quad (\text{forme } -\frac{u'}{u})$$

$$\text{D'où : } \int_0^x T(t) dt = \left[ -\ln(|1-F(t)|) \right]_0^x = \ln(|1-F(0)|) - \ln(|1-F(x)|).$$

$$\text{Comme } F(0) = 0, \quad \int_0^x T(t) dt = \ln(1) - \ln(|1-F(x)|) = -\ln(|1-F(x)|)$$

$$\text{Enfin, pour } x > 0, \quad F(x) = Q(x) \in [0; 1[.$$

$$\text{Finalement, } \int_0^x T(t) dt = -\ln(1-F(x)) = \ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right).$$

# ESC 2018 Corrigé

## Exercice 1

1. a) Calculons :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Par ailleurs, } A + 6I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donc  $A^2 = A + 6I$ .

b)  $A^2 = A + 6I \Leftrightarrow A^2 - A - 6I = O$ .  $X^2 - X - 6$  est donc un polynôme annulateur de  $A$ .

c) Les valeurs propres possibles sont les racines de  $X^2 - X - 6$ .

$-2$  et  $3$  sont les deux racines car  $3^2 - 3 - 6 = 0$  et  $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$ .

Les seules valeurs propres possibles de  $A$  sont donc  $-2$  et  $3$ .

2. a) Calculons :

$$A \times U = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3U.$$

$U$  est donc vecteur propre non nul de  $A$ .  $3$  est la valeur propre associée à  $U$ .

$$A \times V = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2V.$$

$V$  est donc vecteur propre non nul de  $A$ .  $-2$  est la valeur propre associée à  $V$ .

b) Calculons :

$$A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P \times D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc  $AP = PD$ .

$AP = PD$  où  $P$  est une matrice obtenue à partir de vecteurs propres de  $A$  et où  $D$  est une matrice diagonale obtenue avec les valeurs propres associées. Donc  $A$  est diagonalisable.

3. a)  $3 \times 1 - 1 \times (-2) = 3 + 2 = 5 \neq 0$ . Donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, A^n P = P D^n$  :

- $A^0 P = IP = P$  et  $PD^0 = PI = P$ . La propriété est vraie au rang  $0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n P = P D^n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} P = A \times A^n P = A \times P D^n = (A \times P) D^n = (P \times D) D^n = P \times D \times D^n = P D^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

c)  $P$  étant inversible,  $A^n P = P D^n \Leftrightarrow A^n P P^{-1} = P D^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n = P D^n P^{-1}$ .

De plus,  $D$  étant diagonale,  $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ .

Calculons :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3^n & -2 \times (-2)^n \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = P D^n \times P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix}$$

4.  $u_2 = u_1 + 6 \times u_0 + 3 = 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 1 - 3 + 3 = 1$  et  $u_3 = u_2 + 6 \times u_1 + 3 = 1 + 6 \times 1 + 3 = 10$ .

5.  $u = a + 6 \times v + 3$

6. a)  $A X_n + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n + 3 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$

b)  $AL + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 - 6/2 + 3 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = L.$

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, X_n = A^n (X_0 - L) + L$ .

- $A^0 (X_0 - L) + L = I (X_0 - L) + L = X_0 - L + L = X_0.$

La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$X_n = A^n (X_0 - L) + L, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$X_{n+1} = A X_n + B = A \times [A^n (X_0 - L) + L] + B = A^{n+1} (X_0 - L) + (AL + B) = A^{n+1} (X_0 - L) + L.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

d) Calculons  $X_n$ .  $u_n$  en est la deuxième composante.

$$X_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_n = \frac{1}{5} \left( \frac{3}{2} [3^{n+1} - (-2)^{n+1}] \right) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} [3^{n+1} - (-2)^{n+1}] - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} [3^n - (-2)^n] - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a bien :  $u_n = \frac{3}{10} [3^n - (-2)^n] - \frac{1}{2}.$

7.  $X = A \cdot \text{dot}(X) + B$

## Exercice 2

1. a)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$g'(x) = e^x + 1 > 0$  car une exponentielle est toujours positive.

b)  $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0.$

On en déduit que  $g(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; 0]$  et  $g(x) \geq 0$  sur  $[0; +\infty[$ .

2. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) •  $f(x) - (x+1) = -\frac{x}{e^x}.$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{e^x} \right) = 0.$

La droite  $D$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .

c) En  $-\infty$  :  $f(x) = x \left( 1 - \frac{1}{e^x} \right) - 1.$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty.$$

En définitive,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$

3. a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\left( w - \frac{u}{v} \right)' = w' - \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1 \times e^x - e^x \times x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 - \frac{(1-x)}{e^x} = \frac{e^x - (1-x)}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}.$$

**b)**  $e^x > 0$  car une exponentielle est toujours positive. Donc  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$ .

On en déduit, d'après **1. b)** :

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f$     | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

$$f(0) = 0 + 1 - \frac{0}{e^0} = 1.$$

**4.**  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$f''(x) = \frac{g'(x) \times e^x - e^x \times g(x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(g'(x) - g(x))}{(e^x)^2} = \frac{e^x + 1 - (e^x - 1 + x)}{e^x} = \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{2 - x}{e^x}$$

Étudions le signe de  $f''(x)$  :

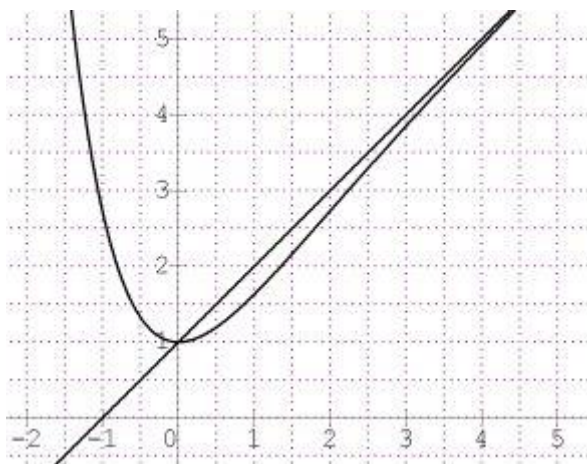
$e^x > 0$  car une exponentielle est toujours positive. Donc  $f''(x)$  est du signe de  $2 - x$ .

On en déduit :

|          |                |     |                |
|----------|----------------|-----|----------------|
| $x$      | $-\infty$      | $2$ | $+\infty$      |
| $f''(x)$ | $+$            | $0$ | $-$            |
| $f$      | <i>convexe</i> |     | <i>concave</i> |

$f$  admet un point d'inflexion en 2.

**5.**





### Exercice 3

1. a) Sur deux tirages,  $X_2 = 1$  s'il y a un changement de couleurs c'est-à-dire si on a tiré une boule blanche en premier puis une boule rouge ou bien si on a tiré une boule rouge en premier puis une boule blanche en deuxième. On a donc  $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$ .

$$P(X_2 = 1) = P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2))$$

$$\Leftrightarrow P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) \text{ par incompatibilité}$$

$$\Leftrightarrow P(X_2 = 1) = P(B_1) \times P(R_2) + P(R_1) \times P(B_2) \text{ par indépendance}$$

$$\Leftrightarrow P(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

b)  $X_2$  suit donc la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{4}{9}$ .

$$\text{On en déduit : } E(X_2) = \frac{4}{9} \text{ et } V(X_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}.$$

2. a) Pour marquer un point au troisième tirage, il faut tirer une couleur différente de la précédente. Autrement dit,  $(X_3 = 1) = (B_2 \cap R_3) \cup (R_2 \cap B_3)$ .  $X_3$  suit donc la même loi que  $X_2$ .

b)  $G$  est égal à la somme des points marqués au deuxième tirage et des points marqués lors du troisième tirage.  $G = X_2 + X_3$ .

$$\text{On en déduit, par linéarité de l'espérance, que } E(G) = E(X_2) + E(X_3) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}.$$

3. a)  $(X_2 = 1) \cap (X_3 = 1) = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cap (R_1 \cap B_2 \cap R_3)$ . On a donc :

$$P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = P((B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cap (R_1 \cap B_2 \cap R_3))$$

$$\Leftrightarrow P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = P((B_1 \cap R_2 \cap B_3)) + P((R_1 \cap B_2 \cap R_3)) \text{ par incompatibilité}$$

$$\Leftrightarrow P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = P(B_1) \times P(R_2) \times P(B_3) + P(R_1) \times P(B_2) \times P(R_3) \text{ par}$$

indépendance

$$\Leftrightarrow P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

b) Comme on sait que  $P(X_2 = 1) = P(X_3 = 1) = \frac{4}{9}$ , le tableau se remplit aisément :

| $X_2 \backslash X_3$ | 0   | 1   | Loi de $X_2$ |
|----------------------|-----|-----|--------------|
| 0                    | 3/9 | 2/9 | 5/9          |
| 1                    | 2/9 | 2/9 | 4/9          |
| Loi de $X_3$         | 5/9 | 4/9 | 1            |

$\text{cov}(X_2, X_3) = E(X_2 X_3) - E(X_2) \times E(X_3)$  avec :

$$E(X_2 X_3) = 0 \times 0 \times \frac{3}{9} + 0 \times 1 \times \frac{2}{9} + 1 \times 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Finalement, } \text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} - \frac{16}{81} = \frac{18}{81} - \frac{16}{81} = \frac{2}{81}.$$

$$4. \quad V(G) = V(X_2) + V(X_3) + 2 \text{cov}(X_2, X_3) = \frac{20}{81} + \frac{20}{81} + 2 \times \frac{2}{81} = \frac{44}{81}.$$

5. a) Cette instruction renvoie un échantillon de  $n$  nombres aléatoires suivant la loi binomiale de paramètres 1 et 1/3, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre 1/3, loi correspondant à l'obtention d'une boule rouge parmi les trois.

b) À chaque fois que deux tirages consécutifs permettent d'obtenir deux couleurs différentes, on marque un point ( $G$  augmente de un). Il faut donc compléter par :  
 $G = G + 1.$

## Exercice 4

$$1. \quad \text{Sous réserve de convergence, } I = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{t} \right]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{a}.$$

$$\text{Sous réserve de convergence, } J = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{t^3} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2t^2} \right]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2A^2} \right) = \frac{1}{2a^2}.$$

$$\text{Sous réserve de convergence, } K = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{t^4} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3A^3} \right) = \frac{1}{3a^3}.$$

### 2. ★ Étude de la continuité

- Sur  $]-\infty; a[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]a; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{3a^3}{t^4}$ , donc  $f$  y est continue.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en peut-être en  $a$ .

### ★ Étude de la positivité

- Sur  $]-\infty; a[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .
- Sur  $]a; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{3a^3}{t^4}$ , donc  $f(t) \geq 0$  (car  $a > 0$ ).

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

### ★ Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4} dt = 0 + 3a^3 J = 1.$$

En définitive,  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. Sous réserve de convergence,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^a t f(t) dt + \int_a^{+\infty} t f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^a t \times 0 dt + \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3} dt = 3a^3 \times J = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

Finalement,  $X$  admet une espérance et  $E(X) = \frac{3a}{2}$ .

Sous réserve de convergence,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^a t^2 f(t) dt + \int_a^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^a t^2 \times 0 dt + \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2} dt = 3a^3 \times I = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.$$

Finalement,  $X$  admet une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{12a^2}{4} - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

4. a)  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Si  $x < a$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

b) Si  $x \geq a$  : d'après la relation de Chasles,  $F(x) = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = 0 + \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt$ .

$$\text{D'où } F(x) = \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt = \left[ -\frac{a^3}{t^3} \right]_a^x = \frac{a^3}{a^3} - \frac{a^3}{x^3} = 1 - \frac{a^3}{x^3} = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3.$$

$$\text{c) } P(2a \leq X \leq 4a) = F(4a) - F(2a) = 1 - \left(\frac{a}{4a}\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right)$$

$$\Leftrightarrow P(2a \leq X \leq 4a) = 1 - \frac{1}{64} - \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{7}{8} = \frac{64 - 1 - 56}{64} = \frac{7}{64}.$$

$$\text{De plus : } P(X \geq 2a) = 1 - F(2a) = \left(\frac{a}{2a}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Finalement,

$$P_{(X \geq 2a)}(X \leq 4a) = \frac{P((X \geq 2a) \cap (X \leq 4a))}{P(X \geq 2a)} = \frac{P(2a \leq X \leq 4a)}{P(X \geq 2a)} = \frac{7/64}{1/8} = \frac{7}{64} \times \frac{8}{1} = \frac{7}{8}.$$

5. a)  $E(M_n) = E\left(\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$  par linéarité de l'espérance.

$$\text{Or pour tout } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } n, E(X_i) = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Il vient : } E(M_n) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n \frac{3a}{2} = \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} = a.$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{9n^2} V\left(\sum_{i=1}^n (X_i)\right) \text{ car } V(aX) = a^2 V(X).$$

$$\Leftrightarrow V(M_n) = \frac{4}{9n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ par indépendance.}$$

$$\text{Or pour tout } i \text{ compris entre 1 et } n, V(X_i) = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Il vient : } V(M_n) = \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}.$$

**b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète ou à densité. Si  $X$  admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Appliquons cette inégalité à  $M_n$  :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|M_n - E(M_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|M_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}.$$

**c) D'après le cours sur l'intervalle de confiance :**

$$P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V(X)}{n\varepsilon}} \leq E(X) \leq \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V(X)}{n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha.$$

**d) D'après la question précédente :**

$$P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V(X)}{n\varepsilon}} \leq E(X) \leq \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V(X)}{n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{3a^2}{4n\varepsilon}} \leq \frac{3a}{2} \leq \bar{X}_n + \sqrt{\frac{3a^2}{4n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{2}{3}\bar{X}_n - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4n\varepsilon}} \leq \frac{2}{3} \times \frac{3a}{2} \leq \frac{2}{3}\bar{X}_n + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

$$\Leftrightarrow P\left(M_n - \frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}} \leq a \leq M_n + \frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}} \leq a - M_n \leq \frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

$$\Leftrightarrow P\left(|a - M_n| \leq \frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

$$\Leftrightarrow P\left(|M_n - a| > \frac{a}{\sqrt{3n\varepsilon}}\right) \leq \alpha, \text{ par passage à l'événement contraire.}$$

Par identification avec la formule de la question **b)**,  $\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3an}}$ .

**e)** On a  $M_{100} = \frac{2}{3 \times 100} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{2 \times 603}{300} = 4,02$ . On peut estimer  $a$  par 4.



# Ecricome 2018 Corrigé

## EXERCICE 1

$$1. \quad M \times V_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2-0 \\ 5-4-0 \\ -8+8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times V_1. \quad V_1 \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre 1.

$$M \times V_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2-5 \\ -5+4-5 \\ 8-8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \times V_2. \quad V_2 \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre 6.

$$M \times V_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-0+5 \\ -5-0+5 \\ 8+0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \times V_3. \quad V_3 \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre  $-2$ .

2.  $M$  est une matrice  $3 \times 3$  qui possède 3 valeurs propres. Elle est donc diagonalisable.

Il existe donc une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres ( $D$  en l'occurrence) et une matrice  $P$ , dont les colonnes sont vecteurs propres associées respectivement aux éléments diagonaux de  $D$ , tels que  $M = PDP^{-1} \Leftrightarrow MP = PD$ .

$$\text{Ici, } P \text{ est constituée des vecteurs } V_1, V_2 \text{ et } V_3 : P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Calculons  $P^3 + P^2 + I$  :

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+0 & -1+1-1 & -1+0+1 \\ 1-1+0 & -1+1+0 & -1+0+0 \\ 0+1-0 & 0-1-1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0-1 & 0+0+1 \\ 1-2+0 & -1+2+1 & -1+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement, } P^3 + P^2 + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

$$(b) \quad P^3 + P^2 + I = O \Leftrightarrow P^3 + P^2 = -I \Leftrightarrow P(P^2 + P) = -I.$$

On en déduit que  $P$  est inversible et  $P^{-1} = -(P^2 + P)$ .

$$P^{-1} = -(P^2 + P) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a)  $Y^2 = Y \times Y = (P^{-1}XP) \times (P^{-1}XP) = P^{-1}X(P P^{-1})XP = P^{-1}(XIX)P = P^{-1}X^2P.$

(b)

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + I &= M \\ \Leftrightarrow (X^2 - 4X + I)P &= MP \\ \Leftrightarrow X^2P - 4XP + P &= MP = PD \\ \Leftrightarrow P^{-1}(X^2P - 4XP + P) &= P^{-1}PD \\ \Leftrightarrow P^{-1}X^2P - 4P^{-1}XP + P^{-1}P &= (P^{-1}P)D \\ \Leftrightarrow Y^2 - 4Y + I &= D \end{aligned}$$

5. (a) Posons  $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ . On cherche  $a, b$  et  $c$  inférieurs à 2 tels que  $Y^2 - 4Y + I = D$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \text{ car } Y \text{ est diagonale.}$$

$$Y^2 - 4Y + I = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 1 = 1 \\ b^2 - 4b + 1 = 6 \\ c^2 - 4c + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a = 0 \\ b^2 - 4b - 5 = 0 \\ c^2 - 4c + 3 = 0 \end{cases}$$

➤  $a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0$  ou  $a = 4 \Leftrightarrow a = 0$  car  $a \leq 2$ .

➤  $b^2 - 4b - 5 = 0$  ;  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$ .

Il y a deux racines :  $b = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1$  ou  $b = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$  qu'on ne retient pas car  $b \leq 2$ .

➤  $c^2 - 4c + 3 = 0$  ;  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ .

Il y a deux racines :  $c = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$  ou  $c = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3$  qu'on ne retient pas car  $c \leq 2$ .

Finalement,  $\begin{cases} a=0 \\ b=-1, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c=1 \end{cases}$ .

(b) On a  $Y = P^{-1}XP \Leftrightarrow PYP^{-1} = (PP^{-1})X(PP^{-1}) \Leftrightarrow PYP^{-1} = X$ .

$$PY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0-1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 & 0+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+1 & 0+1-1 & 0+1+0 \\ 0-1+0 & 0+1+0 & 0+1+0 \\ 0+1+1 & 0-1-1 & 0-1+0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

## EXERCICE 2

### Partie I. (même genre que ESC 2015)

1.  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x} = \frac{2(x^2 - 2)}{x} = \frac{2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x}.$$

- $2 > 0$
- $x > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$
- $x + \sqrt{2} > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$

Donc  $g'(x)$  est du signe de  $x - \sqrt{2}$ .

- $x - \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$



On en déduit le tableau des variations de  $g$  :

|         |   |            |           |
|---------|---|------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0          | +         |
| $g$     |   |            |           |

Le minimum est  $g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$ .

2.  $g(\sqrt{2}) \approx 2(1 - 0,7) = 0,6 > 0$ .

On en déduit que  $g(x) \geq 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

3.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty \end{array} \right\} \text{Par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

Graphiquement, la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale.

4.  $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  par croissances comparées.

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

5.  $f(x) - \frac{x}{4} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0$  d'après ce qui précède.

On en déduit que la droite d'équation  $y = \frac{x}{4}$  est asymptote oblique à la courbe de  $f$ .

6.  $f(x) - \frac{x}{4} = \frac{1 + \ln(x)}{x}$ . Étudions le signe de  $\frac{1 + \ln(x)}{x}$  :

- $x > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$

Donc  $f(x) - \frac{x}{4}$  est du signe de  $1 + \ln(x)$ .

- $1 + \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$ .

On en déduit :

- Sur  $]0 ; e^{-1}[$ , C est au-dessous de D.
- Sur  $]e^{-1} ; +\infty[$ , C est au-dessus de D.
- C et D se coupent au point A d'abscisse  $e^{-1} = \frac{1}{e}$  et d'ordonnée :

$$f(e^{-1}) = \frac{e^{-1}}{4} + \frac{1}{e^{-1}} + \frac{\ln(e^{-1})}{e^{-1}} = \frac{1}{4e} + e - e = \frac{1}{4e}.$$

7.  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

$$\left(u + \frac{v}{w}\right)' = u' + \frac{v'w - w'v}{w^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{1}{4} + \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 4\ln(x)}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2}.$$

Comme  $g(x) > 0$  sur  $]0 ; +\infty[$  et que  $x^2 > 0$ ,  $f'(x) > 0$ .

$f$  est donc strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f$     | $-\infty$ | $+\infty$ |

8. (a)  $f'$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

$$\left(\frac{u}{4v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{4v^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(2x - \frac{4}{x}\right) \times x^2 - 2x(x^2 - 4\ln(x))}{4x^4} = \frac{2x^3 - 4x - 2x^3 + 8x\ln(x)}{4x^4}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{8x\ln(x) - 4x}{4x^4} = \frac{4x(2\ln(x) - 1)}{4x^4} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}.$$

(b) Étudions le signe de  $f''(x)$  :

- $x^3 > 0$  car  $x \in ]0 ; +\infty[$

Donc  $f''(x)$  est du signe de  $2\ln(x) - 1$ .

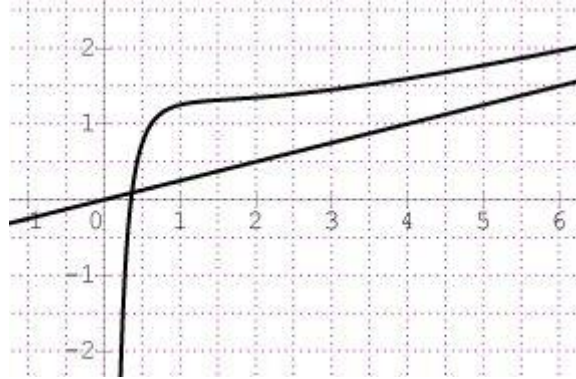
- $2\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{1/2} = \sqrt{e}$ .

- Sur  $]0 ; \sqrt{e}[$ ,  $f$  est concave.
- Sur  $]e^{-1} ; +\infty[$ ,  $f$  est convexe.

- En  $\sqrt{e}$ ,  $f''(x)$  change de signe donc  $f$  change de concavité.

$f$  possède un point d'inflexion en  $\sqrt{e}$ .

$$f(e^{1/2}) = \frac{e^{1/2}}{4} + \frac{1}{e^{1/2}} + \frac{\ln(e^{1/2})}{e^{1/2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{3/2}{\sqrt{e}}.$$



## Partie II.

1.  $u$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions dérivables.

$$(v^2)' = 2v'v. \text{ Donc } u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}.$$

$$2. \quad \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left( \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{1}{2} u(x) \right]_1^e$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx = \left[ \frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx = \left[ \frac{e^2}{8} + \ln(e) + \frac{1}{2} (\ln(e))^2 \right] - \left[ \frac{1^2}{8} + \ln(1) + \frac{1}{2} (\ln(1))^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{8} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{e^2 + 8 + 4 - 1}{8} = \frac{e^2 + 11}{8}.$$

3. ★ Étudions la continuité de  $h$  :

- sur  $]-\infty, 1[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ .
- sur  $]1; e[$ ,  $h(x) = \frac{8}{e^2 + 11} f(x)$ . Donc  $h$  est continue sur  $]1; e[$ .
- sur  $]e, +\infty[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h$  est continue sur  $]e, +\infty[$ .

Finalement,  $h$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

★ Étudions la positivité de  $h$  :

- sur  $] -\infty, 1[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h(x) \geq 0$  sur  $] -\infty, 1[$ .
- sur  $[1; e]$ ,  $h(x) = \frac{8}{e^2 + 11} f(x)$ . Or, d'après la **partie I**,  $f$  est strictement croissante et, de plus,  $f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{\ln(1)}{1} = \frac{5}{4} \geq 0$ . On en déduit que  $f(x) \geq 0$  sur  $[1; e]$ .  
Donc  $h(x) \geq 0$  sur  $[1; e]$ .
- sur  $]e, +\infty[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h(x) \geq 0$  sur  $]e, +\infty[$ .

Finalement,  $h(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calculons, si elle existe,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  :

- d'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^1 h(x) dx + \int_1^e h(x) dx + \int_e^{+\infty} h(x) dx$ ,
- $\int_{-\infty}^1 h(x) dx = 0$  car  $h(x) = 0$  sur  $] -\infty, 1[$ ,
- $\int_1^e h(x) dx = \int_1^e \frac{8}{e^2 + 11} f(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \int_1^e f(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \times \frac{e^2 + 11}{8} = 1$ ,
- $\int_e^{+\infty} h(x) dx = 0$  car  $h(x) = 0$  sur  $]e, +\infty[$ .

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 0 + 1 + 0 = 1$ .

➤  $h$  est donc bien une densité de probabilité.

4. (a) Les fonctions  $x \rightarrow 1$  et  $x \rightarrow \ln(x)$  sont continues et dérivables sur  $[1; e]$ .

On pose  $u(x) = \ln(x)$  et  $v'(x) = 1$ .

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = x$$

On intègre par parties :  $\int u v' = [u v] - \int u' v$

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \ln(x) dx = e \ln(e) - 1 \ln(1) - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.$$

(b) Si elle existe,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx$ .

- d'après la relation de Chasles,  $E(X) = \int_{-\infty}^1 x h(x) dx + \int_1^e x h(x) dx + \int_e^{+\infty} x h(x) dx$ ,
- $\int_{-\infty}^1 x h(x) dx = 0$  car  $h(x) = 0$  sur  $] -\infty, 1[$ ,
- $\int_1^e x h(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \int_1^e x f(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \int_1^e \left( \frac{x^2}{4} + 1 + \ln(x) \right) dx$ ,

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \int_1^e x h(x) dx &= \frac{8}{e^2 + 11} \left( \int_1^e \left( \frac{x^2}{4} + 1 \right) dx + \int_1^e \ln(x) dx \right) \\
\Leftrightarrow \int_1^e x h(x) dx &= \frac{8}{e^2 + 11} \left( \left[ \frac{x^3}{12} + x \right]_1^e + 1 \right) \text{ d'après la question précédente,} \\
\Leftrightarrow \int_1^e x h(x) dx &= \frac{8}{e^2 + 11} \left( \left[ \frac{e^3}{12} + e \right] - \left[ \frac{1^3}{12} + 1 \right] + 1 \right) = \frac{8}{e^2 + 11} \left( \frac{e^3}{12} + e - \frac{1^3}{12} - 1 + 1 \right) \\
\Leftrightarrow \int_1^e x h(x) dx &= \frac{8}{e^2 + 11} \left( \frac{e^3}{12} + e - \frac{1}{12} \right).
\end{aligned}$$

$$\blacksquare \int_e^{+\infty} x h(x) dx = 0 \text{ car } h(x) = 0 \text{ sur } ]e, +\infty[.$$

Finalement,  $X$  admet une espérance et :

$$E(X) = 0 + \frac{8}{e^2 + 11} \left( \frac{e^3}{12} + e - \frac{1}{12} \right) + 0 = \frac{8}{e^2 + 11} \left( \frac{e^3 + 12e - 1}{12} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{e^3 + 12e - 1}{e^2 + 11} \right).$$

### EXERCICE 3

#### Partie I.

1. Le deuxième tirage aura lieu dans l'urne  $U$  si une boule noire y a été tirée lors du premier tirage. Donc  $P(U_2) = \frac{1}{3}$ .

2. Si  $U_2$  est réalisée, la probabilité que  $U_3$  soit réalisée est la même que celle de tirer une boule noire dans  $U$ .  $P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}$ .

Si  $\overline{U_2}$  est réalisée, la probabilité que  $U_3$  soit réalisée est la même que celle de tirer une boule blanche dans  $V$ .  $P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{4}$ .

$U_2$  et  $\overline{U_2}$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_3) = P(U_2) \times P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2}) \times P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2+3}{18} = \frac{5}{18}.$$

3. (a) Si  $U_n$  est réalisée, la probabilité que  $U_{n+1}$  soit réalisée est la même que celle de tirer une boule noire dans  $U$ .  $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$ .

Si  $\overline{U_n}$  est réalisée, la probabilité que  $U_{n+1}$  soit réalisée est la même que celle de tirer une boule blanche dans  $V$ .  $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$ .

(b)  $U_n$  et  $\overline{U_n}$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) \times P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n}) \times P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = P(U_n) \times \frac{1}{3} + (1 - P(U_n)) \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(U_{n+1}) = \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(U_n) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)P(U_n)$$

$$\Leftrightarrow P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \left(\frac{4-3}{12}\right)P(U_n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n).$$

(c)  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{12}\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{11}{12}\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \times \frac{12}{11} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{11}.$

(d) On pose  $v_n = P(U_n) - \alpha$ . Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = P(U_{n+1}) - \alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n) - \alpha. \text{ Or, } \alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha. \text{ Donc :}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\alpha = \frac{1}{12}P(U_n) - \frac{1}{12}\alpha = \frac{1}{12}(P(U_n) - \alpha) = \frac{1}{12}v_n.$$

$(v_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{12}$  et de premier terme

$$v_1 = P(U_1) - \alpha = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}. \text{ On en déduit : } v_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Finalement, } P(U_n) = v_n + \alpha = v_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}.$$

(e)  $-1 < \frac{1}{12} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) = \frac{3}{11}.$

## Partie II.

1. On pioche dans l'urne  $U$ . Il y a deux chances sur trois de tirer une boule blanche et une chance sur trois de ne pas la tirer. Donc  $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $X_1$  suit la loi de Bernoulli de

paramètre  $\frac{2}{3}$ .

2. (a)  $P_{[X_1=0]}(X_2 = 0)$  est la probabilité de tirer une boule noire sachant qu'on a tiré une boule

noire avant (et qu'on est donc resté dans  $U$ ). Donc  $P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}.$

$P_{[X_1=0]}(X_2=1)$  est la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a tiré une boule noire avant (et qu'on est donc resté dans  $U$ ). Donc  $P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \frac{2}{3}$ .

$P_{[X_1=1]}(X_2=1)$  est la probabilité de tirer une boule noire sachant qu'on a tiré une boule blanche avant (et qu'on tire donc dans  $V$ ). Donc  $P_{[X_1=1]}(X_2=1) = \frac{3}{4}$ .

$P_{[X_1=1]}(X_2=2)$  est la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a tiré une boule blanche avant (et qu'on tire donc dans  $V$ ). Donc  $P_{[X_1=1]}(X_2=2) = \frac{1}{4}$ .

(b) On a :  $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

$[X_1=0]$  et  $[X_1=1]$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_2=0) = P(X_1=0) \times P_{[X_1=0]}(X_2=0) + P(X_1=1) \times P_{[X_1=1]}(X_2=0)$$

$$\Leftrightarrow P(X_2=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{9}.$$

De même,

$$P(X_2=1) = P(X_1=0) \times P_{[X_1=0]}(X_2=1) + P(X_1=1) \times P_{[X_1=1]}(X_2=1)$$

$$\Leftrightarrow P(X_2=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{4+9}{18} = \frac{13}{18}.$$

Puis :

$$P(X_2=2) = P(X_1=0) \times P_{[X_1=0]}(X_2=2) + P(X_1=1) \times P_{[X_1=1]}(X_2=2)$$

$$\Leftrightarrow P(X_2=2) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

En résumé, la loi de  $X_2$  est :

|              |               |                 |               |
|--------------|---------------|-----------------|---------------|
| $X_2 = k$    | 0             | 1               | 2             |
| $P(X_2 = k)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{13}{18}$ | $\frac{1}{6}$ |

(c)  $E(X_2) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{13}{18} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{0+13+6}{18} = \frac{19}{18}.$

3. `tirage2= rd.randint(1,4)` (car on reste dans l'urne  $U$ )  
`res2=1` (tirage d'une blanche)  
`res2=0`

4. Il est possible de ne tirer que des boules noires comme il est possible de ne tirer que des boules blanches. Donc  $X_n(\Omega) = 0, n$ .

$P(X_n = 0)$  est la probabilité de ne tirer que des boules noires (en restant systématiquement dans  $U$ ).

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P((X_1 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)) \\ \Leftrightarrow P(X_n = 0) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) \times \dots \times P_{[(X_1=0) \cap \dots \cap (X_{n-1}=0)]}(X_n = 0) \\ \Leftrightarrow P(X_n = 0) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

5. On commence par tirer dans  $U$ . Si on tire une boule blanche, on change d'urne puis si on tire une autre boule blanche, on revient dans  $U$ . Ainsi, toute obtention d'un nombre pair de boules blanches permet de revenir dans  $U$ . Ainsi, si après avoir obtenu au cours des  $n$  premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la  $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans  $U$ .

6.  $[X_n = 0]$  et  $[X_n = 1]$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)$$

Or,  $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$  car on est dans  $U$  et on pioche une blanche, et

$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}$  car on est dans  $V$  et on pioche une noire.

Finalement,  $P(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1)$ .

7.  $u_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times P(X_{n+1} = 1)$ . On utilise  $(R_1)$  :

$$u_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \left[ \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1) \right]. \text{ Or d'après la question 4., } P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \left[ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}P(X_n = 1) \right] = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1) = \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n + u_n. \end{aligned}$$



8. (a) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, u_n = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right)$  :

- $\frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^1 \right) = \frac{8}{5} \left( 1 - \frac{4}{9} \right) = \frac{8}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$ .

De plus,  $u_1 = \left( \frac{4}{3} \right)^1 \times P(X_1 = 1) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ .

La propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$u_n = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right)$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left( \frac{4}{9} \right)^n = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right) + \frac{8}{9} \times \left( \frac{4}{9} \right)^n = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n + \frac{5}{9} \times \left( \frac{4}{9} \right)^n \right)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{8}{5} \left( 1 - \frac{4}{9} \left( \frac{4}{9} \right)^n \right) = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^{n+1} \right).$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On en déduit :

$$u_n = \left( \frac{4}{3} \right)^n \times P(X_n = 1) = \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right).$$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 1) = \left( \frac{3}{4} \right)^n \times \frac{8}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right) = \frac{8}{5} \left( \left( \frac{3}{4} \right)^n - \left( \frac{3}{4} \right)^n \times \left( \frac{4}{9} \right)^n \right)$$

$$\Leftrightarrow P(X_n = 1) = \frac{8}{5} \left( \left( \frac{3}{4} \right)^n - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right).$$

(c)  $-1 < \frac{3}{4} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n = 0$ .

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$ .

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) = \frac{8}{5} (0 - 0) = 0$ .

La probabilité de ne tirer qu'une seule boule blanche au cours des  $n$  premiers tirages tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

# ESCP 2018 Corrigé

## EXERCICE 1

1. a)  $ad - bc = 0$  : les matrices de  $\mathcal{E}$  ne sont pas inversibles.

b) Pour la première matrice :  $a = 1, b = 1, c = -1$  et  $d = -1$ .

$$a + d = 1 - 1 = 0 \text{ et } ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = 0. \text{ Donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

Pour la deuxième matrice :  $a = 1, b = -1, c = 1$  et  $d = -1$ .

$$a + d = 1 - 1 = 0 \text{ et } ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = 0. \text{ Donc } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{E} \text{ car } ad - bc \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{E} \text{ car } a + d \neq 0.$$

La somme et le produit de deux matrices de  $\mathcal{E}$  n'appartiennent pas nécessairement à  $\mathcal{E}$ .

d) Par appartenance de  $M$  à  $\mathcal{E}$ ,  $a + d = 0 \Leftrightarrow d = -a$  et  $ad - bc = 0 \Leftrightarrow bc = -a^2$ .

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donc } M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab - ab \\ ac - ac & bc + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$\text{Pour tout } n \geq 2, M^n = M^{n-2} \times M^2 = M^{n-2} \times O = O.$$

2. a)  $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 5 + 4 = 9 \neq 0$ . Donc  $A$  est inversible.

$$\text{b) } K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \text{ car } -2 + 2 = 0 \text{ et } ad - bc = -4 + 4 = 0.$$

$$\text{c) (i) } A = K + 3I.$$

$$\text{D'après la formule du binôme de Newton, pour } n \geq 0 : A^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} K^k (3I)^{n-k}.$$

Or,  $K \in \mathcal{E}$ , donc  $K^n = O$  pour tout  $n \geq 2$ .

$$\text{Finalement, } A^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} K^k (3I)^{n-k} = \binom{n}{0} K^0 (3I)^{n-0} + \binom{n}{1} K^1 (3I)^{n-1} + O,$$

$$\Leftrightarrow A^n = 3^n I + n 3^{n-1} K.$$

$$\text{(ii) On en déduit : } A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \cdot 3^{n-1} & 2n \cdot 3^{n-1} \\ -2n \cdot 3^{n-1} & 3^n + 2n \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ , donc  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}$ .

De plus,  $-\alpha A - \beta I = -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & -2\alpha \\ 2\alpha & -5\alpha - \beta \end{pmatrix}$ .

On cherche  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & -2\alpha \\ 2\alpha & -5\alpha - \beta \end{pmatrix}$ .

Par identification,  $2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$ , et  $-\alpha - \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = 3 - \alpha = 3 + 6 = 9$ .

Finalement,  $A^2 - 6A + 9I = O$ .

b)  $A^2 - 6A + 9I = O \Leftrightarrow A^2 - 6A = -9I \Leftrightarrow A(A - 6I) = -9I$ .

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = -\frac{1}{9}(A - 6I) = -\frac{1}{9}A + \frac{2}{3}I = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$ .

c) Or,  $A = K + 3I$ , donc  $A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K + 3I) = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$ .

D'après 2. c) (i), pour  $n \geq 0$  :  $A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$ .

Remplaçons  $n$  par  $-1$  dans le deuxième membre :

$$3^{-1}I + (-1)3^{-2}K = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K = A^{-1} \text{ d'après la question précédente.}$$

Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ .

(On a remplacé  $n$  par  $-n$ ).

- $A^{-1} = 3^{-1}I - 3^{-2}K$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{-(n+1)} = A^{-n} \times A^{-1} = (3^{-n}I - n3^{-n-1}K)(3^{-1}I - 3^{-2}K)$$

$$\Leftrightarrow A^{-(n+1)} = 3^{-n-1}I - 3^{-n-2}K - n3^{-n-2}K + n3^{-n-3}K^2$$

$$\Leftrightarrow A^{-(n+1)} = 3^{-n-1}I - (n+1)3^{-n-2}K \text{ car } K^2 = O,$$

$$\Leftrightarrow A^{-(n+1)} = 3^{-(n+1)}I - (n+1)3^{-(n+1)-1}K.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

En définitive, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$ .

4. a)  $A^2 - 6A + 9I = O$ , donc  $X^2 - 6X + 9$  est un polynôme annulateur.

Or,  $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$ . Donc il ne possède qu'une seule racine, 3.

La seule valeur propre possible de  $A$  est 3.

**b)** Résolvons l'équation matricielle d'inconnue  $X$ ,  $AX = 3X$ .

On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  avec  $x$  et  $y$  réels.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ -2x + 5y = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

## EXERCICE 2

**1 a)**  $I_0 = \int_1^e t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}.$

**b)**  $\forall t \in [1; e], t \geq 0$  et  $\ln t \geq 0$ . Donc  $t \rightarrow t(\ln t)^n$  est continue et positive.

Comme  $1 \leq e$ , par positivité de l'intégrale,  $I_n \geq 0$ .

**c)**  $I_{n+1} - I_n = \int_1^e t(\ln t)^{n+1} \, dt - \int_1^e t(\ln t)^n \, dt = \int_1^e (t(\ln t)^{n+1} - t(\ln t)^n) \, dt$  par linéarité,

$$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n = \int_1^e t(\ln t)^n (\ln t - 1) \, dt.$$

$\forall t \in [1; e], t \geq 0, \ln t \geq 0$  car  $t \geq 1$  et  $\ln t \leq 1$  car  $t \leq e$ .

Par suite,  $t \rightarrow t(\ln t)^n (\ln t - 1)$  est continue et négative.

Comme  $1 \leq e$ , par positivité de l'intégrale,  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .

La suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est donc décroissante.

De plus, la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est minorée par 0.

Par théorème de convergence monotone, la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

**2. a)**  $(u^{n+1})' = (n+1) \times u' \times u^n$ , donc  $f_n'(t) = (n+1) \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^n$ .

**b)** Intégrons par parties :  $I_{n+1} = \int_1^e t(\ln t)^{n+1} \, dt$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$  sont continues et dérivables sur  $[1; e]$ .

On intègre par parties.

On pose :  $u(t) = (\ln t)^{n+1} \Rightarrow u'(t) = \frac{n+1}{t} (\ln t)^n$  et  $v'(t) = t \Rightarrow v(t) = \frac{t^2}{2}$ .

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v, \text{ donc } I_{n+1} = \left[ \frac{t^2}{2} \times (\ln t)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{t} (\ln t)^n \times \frac{t^2}{2} dt,$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} \times (\ln e)^{n+1} - 0 - \frac{n+1}{2} \int_1^e t (\ln t)^n dt,$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{n+1}{2} I_n,$$

$$\Leftrightarrow 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n,$$

$$\Leftrightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2.$$

c) Remplaçons  $n$  par 0 dans la formule précédente :

$$2I_1 + I_0 = e^2 \Leftrightarrow 2I_1 + \frac{e^2 - 1}{2} = e^2 \Leftrightarrow 2I_1 = e^2 - \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

d) D'une part,

$$I_{n+1} \leq I_n \Leftrightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq 2I_n + (n+1)I_n \Leftrightarrow e^2 \leq (n+3)I_n \Leftrightarrow \frac{e^2}{n+3} \leq I_n.$$

D'autre part,

$$I_{n+1} \leq I_n \Leftrightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_{n+1} \leq 2I_{n+1} + (n+1)I_n \Leftrightarrow (n+3)I_{n+1} \leq e^2 \Leftrightarrow I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3}.$$

On a donc :  $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$  (on a remplacé  $n$  par  $n-1$ ).

En définitive,  $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+3} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$ .

Par théorème d'encadrement,  $(I_n)_{n \geq 0}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \Leftrightarrow \frac{ne^2}{n+3} \leq nI_n \leq \frac{ne^2}{n+2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n} = e^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n} = e^2.$$

Par théorème d'encadrement,  $(nI_n)_{n \geq 0}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e^2$ .

f) 

```
import numpy as np
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
I=(np.exp(2)-1)/2
for k in range(1,n+1):
 I=(np.exp(2)-k*I)/2
print(I)
```

3. a) On a :  $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$  et  $\frac{2e^2}{n+4} \leq 2I_{n+1} \leq \frac{2e^2}{n+3}$  (en remplaçant  $n$  par  $n+1$  et en multipliant par 2).

Par somme d'encadrements :

$$\begin{aligned} & \frac{2e^2}{n+4} + \frac{e^2}{n+3} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{2e^2}{n+3} + \frac{e^2}{n+2}, \\ \Leftrightarrow & \frac{2e^2(n+3) + e^2(n+4)}{(n+4)(n+3)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{2e^2(n+2) + e^2(n+3)}{(n+3)(n+2)}, \\ \Leftrightarrow & \frac{[2(n+3) + (n+4)]}{(n+4)(n+3)} e^2 \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{[2(n+2) + (n+3)]}{(n+3)(n+2)} e^2, \\ \Leftrightarrow & \frac{[2n+6+n+4]}{(n+4)(n+3)} e^2 \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{[2n+4+n+3]}{(n+3)(n+2)} e^2, \\ \Leftrightarrow & \frac{(3n+10)e^2}{(n+4)(n+3)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

- b)  $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \Leftrightarrow 2I_{n+1} + nI_n + I_n = e^2 \Leftrightarrow 2I_{n+1} + I_n = e^2 - nI_n$ . Dès lors :

$$\begin{aligned} & \frac{(3n+10)e^2}{(n+4)(n+3)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+3)(n+2)} \\ \Leftrightarrow & \frac{(3n+10)e^2}{(n+4)(n+3)} \leq e^2 - nI_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+3)(n+2)}, \\ \Leftrightarrow & \frac{(3n+10)ne^2}{(n+4)(n+3)} \leq n(e^2 - nI_n) \leq \frac{(3n+7)ne^2}{(n+3)(n+2)}, \\ \Leftrightarrow & \frac{(3n+10)ne^2}{(n+4)(n+3)} \leq w_n \leq \frac{(3n+7)ne^2}{(n+3)(n+2)}. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+10)ne^2}{(n+4)(n+3)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2e^2}{n^2} = 3e^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+7)ne^2}{(n+3)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2e^2}{n^2} = 3e^2. \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement,  $(w_n)_{n \geq 0}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3e^2$ .

4. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right)$ .

$$\bullet \quad \frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}} \left( e^2 \sum_{k=0}^0 \frac{(-2)^k}{0!} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( e^2 \frac{(-2)^0}{0!} - 1 \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 1) = I_0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right), \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$$

$$\Leftrightarrow 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n,$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{(n+1)}{2}I_n,$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{(n+1)}{2} \times \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right),$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right),$$

$$(\text{rappel : } -(-1)^n = (-1) \times (-1)^n = (-1)^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \times \frac{1}{2}e^2 + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right),$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left[ \frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \times \frac{1}{2}e^2 + \left( e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \right],$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left[ \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^2 + e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right],$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left[ e^2 \times \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right],$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left[ e^2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right].$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

### EXERCICE 3

1. a) À l'issue de la première expérience :

- soit on a tiré une boule blanche et l'urne est désormais composée d'une boule rouge et de deux boules blanches, donc  $X_1 = 1$ .
- soit on a tiré une boule rouge et l'urne est désormais composée de deux boules rouges et d'une boule blanche, donc  $X_1 = 2$ .

Finalement,  $X_1(\Omega) = 1; 2$ .

Il y a équiprobabilité de tirage de la première boule.

$X_1$  suit donc la loi discrète uniforme sur  $1; 2$ .

Dès lors,  $\forall k \in X_1(\Omega), P(X_1 = k) = \frac{1}{2}$ .

$$E(X_1) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } V(X_1) = \frac{2^2-1}{12} = \frac{4-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

b) Il n'y a qu'une seule boule rouge dans l'urne à l'issue de deuxième tirage si on y a ajouté (donc tiré) que des boules blanches.  $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ .

Il y a deux boules rouges dans l'urne à l'issue de deuxième tirage si on a tiré une seule boule rouge (soit la première fois, soit la deuxième fois).

$$[X_2 = 2] = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2).$$

Il y a trois boules rouges dans l'urne à l'issue de deuxième tirage si on y a ajouté (donc tiré) que des boules rouges.  $[X_2 = 3] = R_1 \cap R_2$ .

c) D'après ce qui précède,  $X_1(\Omega) = 1; 3$ .

De plus :

$$P([X_2 = 1]) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(Il y a deux boules blanches sur trois lors du deuxième tirage).

$$P([X_2 = 3]) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(Il y a deux boules rouges sur trois lors du deuxième tirage).

$$P([X_2 = 2]) = 1 - P([X_2 = 1]) - P([X_2 = 3]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Finalement,  $X_2$  suit donc la loi discrète uniforme sur  $1; 3$ .

$$\text{Dès lors, } E(X_2) = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } V(X_2) = \frac{3^2-1}{12} = \frac{9-1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$



2. a)

| $X_2 \backslash X_1$ | 1             | 2             | Loi de $X_2$  |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|
| 1                    | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ |
| 2                    | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 3                    | 0             | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| Loi de $X_1$         | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1             |

$$[X_1 = 1] \cap [X_2 = 3] = B_1 \cap (R_1 \cap R_2) = \emptyset, \text{ donc } P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 3]) = 0.$$

$$[X_1 = 2] \cap [X_2 = 1] = R_1 \cap (B_1 \cap B_2) = \emptyset, \text{ donc } P([X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]) = 0.$$

b) On a vu par ailleurs :  $E(X_1) = \frac{3}{2}$  et  $E(X_2) = 2$ .

$$E(X_1 X_2) = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 + 0 \times 2 \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 \times 2 + \frac{1}{6} \times 2 \times 2 + 0 \times 1 \times 3 + \frac{1}{3} \times 2 \times 3,$$

$$\Leftrightarrow E(X_1 X_2) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + 0 + \frac{6}{3} = \frac{1}{3} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} = \frac{1}{3} + 1 + 2 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}.$$

Finalement :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1) \times E(X_2) = \frac{10}{3} - \frac{3}{2} \times 2 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{10}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1}{3}.$$

$\text{cov}(X_1, X_2) \neq 0$ , donc les deux variables ne sont pas indépendantes.

3. a) Il n'y a qu'une seule boule rouge dans l'urne à l'issue du  $n$ -ième tirage si on y a ajouté (donc tiré) que des boules blanches.  $[X_n = 1] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ .

b)  $P([X_n = 1]) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n).$

$$\Leftrightarrow P([X_n = 1]) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

d'après la formule des probabilités composées,

$$\Leftrightarrow P([X_n = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Il y a  $n+1$  boules rouges dans l'urne à l'issue du  $n$ -ième tirage si on y a ajouté (donc tiré) que des boules rouges.  $[X_n = n+1] = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n$ .

$$P([X_n = n+1]) = P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n).$$

$$\Leftrightarrow P([X_n = n+1]) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \dots \times P_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n)$$

d'après la formule des probabilités composées,

$$\Leftrightarrow P([X_n = n+1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

**4. a)** On souhaite calculer  $P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1}=k])$ .

$[X_n = k-1]$  : après  $n$  tirages, l'urne contient  $n+2$  boules dont  $k-1$  boules rouges.

$[X_{n+1} = k]$  : après  $n+1$  tirages, une boule rouge de plus donc on a tiré une boule rouge

$$\text{et : } P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1}=k]) = P_{[X_n=k-1]}(R_{n+1}) = \frac{k-1}{n+2}.$$

On souhaite calculer  $P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=k])$ .

$[X_n = k]$  : après  $n$  tirages, l'urne contient  $n+2$  boules dont  $k$  boules rouges et  $n+2-k$  boules blanches.

$[X_{n+1} = k]$  : après  $n+1$  tirages, il y a autant de boules rouges donc on a tiré une boule

$$\text{blanche et : } P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=k]) = P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

**b)**  $[X_{n+1} = k]$  ne peut-être obtenu que si on a  $[X_n = k]$  ou  $[X_n = k-1]$ .

$[X_n = k]$  et  $[X_n = k-1]$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P([X_{n+1} = k]) = P([X_n = k]) \times P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = k]) + P([X_n = k-1]) \times P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]),$$

$$\Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) = P([X_n = k]) \times \frac{n+2-k}{n+2} + P([X_n = k-1]) \times \frac{k-1}{n+2}.$$

**c)** Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1$ ,  $X_n$  suit la loi uniforme discrète sur  $1, n+1$

$$\text{c'est à dire } \forall k \in 1, n+1, P([X_n = k]) = \frac{1}{n+1}.$$

•  $X_1$  suit la loi uniforme discrète sur  $1, 2$ . La propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $\forall k \in 1, n+1$ ,  $P([X_n = k]) = \frac{1}{n+1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 P([X_{n+1} = k]) &= P([X_n = k]) \times \frac{n+2-k}{n+2} + P([X_n = k-1]) \times \frac{k-1}{n+2}, \\
 \Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2}, \\
 \Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} [(n+2-k) + (k-1)], \\
 \Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} [n+2-k+k-1], \\
 \Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \times (n+1), \\
 \Leftrightarrow P([X_{n+1} = k]) &= \frac{1}{n+2}.
 \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

5. `import numpy.random as rd`

`n=int(input('entrer la valeur de n : '))`

`r,b=1,1`

`for k in range(n):`

`if rd.random()<r/(r+b) : r=r+1`

`else: b=b+1`

`x=r`

`print(x)`

6. a) Le problème est symétrique entre boules rouges et boules blanches puisqu'au départ il y a une boule rouge et une boule blanche.

$Y_n$  suit la même loi que  $X_n$ .

b) Il y a  $n+2$  boules dans l'urne après  $n$  tirages. Donc  $X_n + Y_n = n+2$ .

c)  $X_n$  et  $Y_n$  suivent la même loi, donc  $\rho(X_n, Y_n) = 1$ .

## EXERCICE 4

1. Par cours,  $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$  et  $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Leftrightarrow E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. a) ★ **Étude de la continuité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f$  est continue.
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ , donc  $f$  est continue par produit de fonctions continues.

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf, peut-être en 0.

★ **Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f(x) \geq 0$ .
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ , donc  $f(x) \geq 0$  par produit de termes positifs.

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ **Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = \lambda E(Z).$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

- b) Il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0 + \lambda \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \lambda E(Z^2) \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ converge, } U \text{ admet une espérance et } E(U) = \lambda E(Z^2) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

3. a) Les fonctions  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto e^{-\lambda x}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties.

$$\text{On pose : } u(x) = x^3 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 \text{ et } v'(x) = e^{-\lambda x} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}.$$

$$\int_0^A uv' = [uv]_0^A - \int_0^A u'v, \text{ donc } \int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx = \left[ -\frac{1}{\lambda} x^3 e^{-\lambda x} \right]_0^A - \int_0^A 3x^2 \times \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx = \left( -\frac{1}{\lambda} A^3 e^{-\lambda A} \right) - (0) + \frac{3}{\lambda} \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx = -\frac{A^3}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{3}{\lambda} \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

**b) D'après la question 2. b) :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow 0 + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Sous réserves de convergences,

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{A^3}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{3}{\lambda} \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx \right).$$

Or, d'une part,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{A^3}{\lambda} e^{-\lambda A} \right) = 0$  par croissances comparées, et d'autre part,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx \right) \text{ existe et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx \right) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx \text{ existe et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^3 e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{3}{\lambda} \times \frac{2}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^4}$$

L'existence de la variance de  $U$  résulte de l'existence et la convergence de  $E(U^2)$ .

Sous réserves de convergence,

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx. \text{ Or, } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{6}{\lambda^4}.$$

$$\text{Donc } E(U^2) = \lambda^2 \times \frac{6}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^2}. \text{ La variance de } U \text{ existe.}$$

**c) Dès lors, d'après la formule de Koenig-Huygens :**

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \left( \frac{2}{\lambda} \right)^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\mathbf{4. a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(U \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : si } x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

2<sup>e</sup> cas : si  $x \geq 0$ , d'après la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 \int_0^x t e^{-\lambda t} dt$$

Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto e^{-\lambda t}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties.

$$\text{On pose : } u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \text{ et } v'(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}.$$

$$\int_0^x uv' = [uv]_0^x - \int_0^x u'v, \text{ donc } \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \left[ -\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x 1 \times \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) dt,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \left( -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right) - (0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda x} - 1) = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}.$$

Finalement, 
$$F(x) = \lambda^2 \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 \left( -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1,$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \lambda^2 \int_0^x t e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0.$$

**b)** 
$$\left[ |U - E(U)| \leq E(U) \right] = \left[ \left| U - \frac{2}{\lambda} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \right] = \left[ -\frac{2}{\lambda} \leq U - \frac{2}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda} \right],$$

$$\Leftrightarrow \left[ |U - E(U)| \leq E(U) \right] = \left[ -\frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \leq U - \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \right] = \left[ 0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda} \right].$$

On a bien : 
$$P\left(\left[ |U - E(U)| \leq E(U) \right]\right) = P\left(\left[ 0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda} \right]\right).$$

**c)** 
$$P\left(\left[ 0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda} \right]\right) = F\left(\frac{4}{\lambda}\right) - F(0) = \left( 1 - \left( 1 + \lambda \times \frac{4}{\lambda} \right) e^{-\lambda \times \frac{4}{\lambda}} \right) - 0,$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left[ 0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda} \right]\right) = 1 - 5e^{-4} = 1 - \frac{5}{e^4}. \text{ Or, } e^4 > 50, \text{ donc } \frac{1}{e^4} < \frac{1}{50} \text{ et } -\frac{1}{e^4} > -\frac{1}{50}.$$

On en déduit : 
$$P\left(\left[ 0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda} \right]\right) > 1 - \frac{5}{50} \quad \text{et} \quad \text{finalement,}$$

$$P\left(\left[ |U - E(U)| \leq E(U) \right]\right) > 0,9$$

**5. a)** 
$$E(\overline{U_n}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(U_k) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

Or  $\forall k \in 1, n$ ,  $E(U_k) = \frac{2}{\lambda} = 2a$ . D'où : 
$$E(\overline{U_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2a = \frac{1}{n} \times n \times 2a = 2a.$$

Si on considère  $W_n = \frac{1}{2} \overline{U_n}$ ,  $E(W_n) = E\left(\frac{1}{2} \overline{U_n}\right) = \frac{1}{2} E(\overline{U_n}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$ .

**b)** 
$$V(W_n) = V\left(\frac{1}{2} \overline{U_n}\right) = \frac{1}{4} V(\overline{U_n}) \text{ car } V(aX) = a^2 V(X).$$

$$V(W_n) = \frac{1}{4} V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{4n^2} V\left(\sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n V(U_k) \text{ par mutuelle indépendance.}$$

Or  $\forall k \in 1, n$ ,  $V(U_k) = \frac{2}{\lambda^2}$ , d'où 
$$V(W_n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{4n^2} \times n \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{2n\lambda^2}.$$

On en déduit : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\lambda^2} = 0.$$

c)  $W_n$  est une variable qui admet variance, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|W_n - E(W_n)| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2}.$$

Comme  $E(W_n) = a$  et  $V(W_n) = \frac{1}{2n\lambda^2}$ , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|W_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{1}{2n\varepsilon^2\lambda^2}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\varepsilon^2\lambda^2} = 0$ , et  $0 \leq P\left(\left[|W_n - a| \geq \varepsilon\right]\right)$ , par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[|W_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

# ESC 2017 Corrigé

## Exercice 1

### 1. Calculons :

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\text{Donc } P \times P^2 = I. P \text{ est inversible et } P^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2. Calculons :

$$A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 0+0+2 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} \times (AP) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+2+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+2 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

### 3. a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \geq 0, L^n = P^{-1}A^nP$ :

- $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = L^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $L^n = P^{-1}A^nP$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$L^{n+1} = L \times L^n = P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP = P^{-1}A(PP^{-1})A^nP = P^{-1}AA^nP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

### b) Calculons :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+4+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$J^3 = J \times J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On observe tout d'abord que, pour tout  $k$  entier supérieur ou égal à 3,

$$J^k = J^3 \times J^{k-3} = O.$$

D'après la question précédente,  $L = J + I$ .  $I$  et  $J$  commutent.

Pour tout  $n \geq 2$ , d'après la formule du binôme :

$$L^n = (J + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k} = I + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \text{ car } J^k = O$$

pour  $k \geq 3$

$$\text{d) } L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } n=0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 0 & 2 \times 0 \times (0-1) \\ 0 & 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = L^0.$$

Le résultat reste vrai pour  $n=0$ .

$$\text{Si } n=1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \times (1-1) \\ 0 & 1 & 2 \times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L = L^1.$$

Le résultat reste vrai pour  $n=1$ .

e) Pour tout entier  $n$ ,  $L^n = P^{-1}A^nP \Leftrightarrow A^n = PL^nP^{-1}$ . On en déduit :

$$P \times L^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \\ 1+0+0 & 2n+0+0 & 2n(n-1)+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+2n+0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P \times L^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}.$$

puis :

$$PL^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+2n(n-1) & 1+0+0 & 0+2n+0 \\ 0+0+2n & 0+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^n = PL^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a)  $(u_n)$  est une suite constante. Pour tout  $n \geq 1$  ;  $u_n = u_1 = 1$ .

b) Calculons  $AX_n$  :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, X_n = A^{n-1}X_1$  :

- $A^{1-1}X_1 = A^0X_1 = IX_1 = X_1$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $X_n = A^{n-1}X_1$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^{n-1}X_1 = A^nX_1 = A^{(n+1)-1}X_1.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

d) En utilisant le résultat de la question 3.e), il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)[(n-2)+2] \\ 2n-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n) \\ 2n \end{pmatrix}$$

Par identification, on a bien pour tout entier  $n \geq 1$  :  $v_n = 2n(n-1)$  et  $w_n = 2n$ .

5. a) `A=np.array([[1,0,0],[0,1,2],[2,0,1]])`

b) Le programme permet le calcul d'un vecteur X, représentant  $X_n$  dont les coordonnées donnent respectivement  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .  $v_n$  est obtenue à la deuxième coordonnée de X.  
Réponse C.

c) De la même façon, `w[i]=X[2]`.

## Exercice 2

1. a) En  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty.$$

$$\text{On en déduit } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

b)  $g$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  comme produit et différence de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

$$(uv - 1)' = u'v + uv'.$$

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Étudions le signe de  $g'(x)$  :

- $x+1 \geq 0$  car  $x \in [0 ; +\infty[$ .
- $e^x > 0$  car une exponentielle est toujours positive.

Finalement  $g'(x) \geq 0$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

On en déduit le tableau des variations de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

|         |    |           |
|---------|----|-----------|
| $x$     | 0  | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |    | +         |
| $g(x)$  | -1 | $+\infty$ |

$$\text{Avec } g(0) = 0e^0 - 1 = -1.$$

- c) •  $g$  est continue sur  $[0 ; +\infty[$ .
- $g$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - $0 \in g([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$ .

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $[0 ; +\infty[$ .

- $g(0) = -1 < 0$ .
- $g(1) = 1e^1 - 1 = e - 1 \approx 1,7 > 0$ .

On en déduit que  $\alpha \in [0; 1]$ .

d) On déduit des questions b) et c) le signe de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | - | 0        | +         |

2. a) En  $0^+$  :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

En  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b)  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .

$$(u - v)' = u' - v'.$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}.$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  :

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

c) Par construction,  $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ .

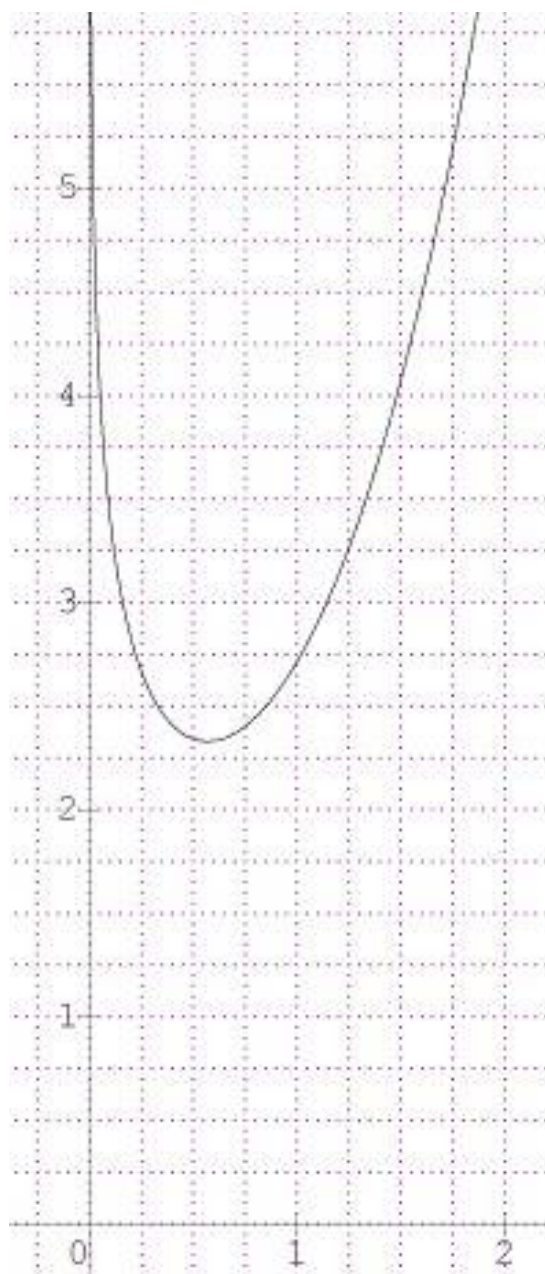
$$\text{On en déduit : } f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln\left(\frac{1}{e^\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \alpha.$$

3. a)  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ .  $f'$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables

$$\text{sur } ]0; +\infty[ \text{ et } f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

b)  $f''(x) > 0$  car  $e^x > 0$  et  $\frac{1}{x^2} > 0$ . Donc  $f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .

4.



### Exercice 3

1. À l'instant 0, l'enfant se trouve au niveau A. On a donc :  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  et  $c_0 = 0$ .

D'après l'énoncé, la probabilité d'y rester est  $\frac{1}{3}$  et celle de monter au niveau B est  $\frac{2}{3}$ .

On a donc :  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $b_1 = \frac{2}{3}$  et  $c_1 = 0$ .

2. Dans le système complet  $\{A_n, B_n, C_n\}$  d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}),$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times 0 = \frac{1}{3} a_n.$$

De même,  $P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0 = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n.$$

Puis :  $P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{2}{3} + c_n \times 1 = \frac{2}{3} b_n + c_n.$$

3.  $(a_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme  $a_0 = 1$ .

On en déduit que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = a_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$ .

4. a) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_{n+1} = 3^{n+1} b_{n+1} = 3^{n+1} \left( \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \right) = 3^{n+1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3^{n+1}}{3} b_n = 2 + 3^n b_n = v_n + 2.$$

$(v_n)$  est donc la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme  $v_0 = 3^0 b_0 = 1 \times 0 = 0$ .

- b) On en déduit la formule explicite de  $v_n$ .

Pour tout  $n$  entier naturel,  $v_n = v_0 + nr = 0 + 2n = 2n$ .

L'expression de  $b_n$  en découle :  $v_n = 3^n b_n \Leftrightarrow b_n = \frac{v_n}{3^n} = \frac{2n}{3^n}$ .

5. Le système d'événements  $\{A_n, B_n, C_n\}$  est complet. Donc  $a_n + b_n + c_n = 1$ .

Finalement,  $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2n}{3^n}$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{3^n} = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$ .

Plus les instants de jeu défilent, plus l'enfant a de chances de se retrouver au troisième niveau.

6. a) L'enfant atteint le sommet au plus tôt à l'instant 2 et peut l'atteindre à n'importe quel moment par la suite – ou pas.  $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0; 1\}$ .
- b) L'enfant atteint le sommet de la cage à l'instant  $n$  s'il se trouve au sommet à l'instant  $n$  ET s'il se trouvait à l'étage inférieur à l'instant  $n-1$ .  $(X = n) = B_{n-1} \cap C_n$ .
- c)  $P(X = n) = P(B_{n-1} \cap C_n) = P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(C_n) = b_{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2(n-1)}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} = \frac{4(n-1)}{3^n}$  pour  $n \geq 2$ .

7. a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'enfant quitte le niveau A, avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ ,
- échec : l'enfant reste au niveau A, avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

La variable aléatoire  $X_1$  est égale au rang de premier succès.

$X_1$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$ .

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in X_1(\Omega), P(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

$$E(X_1) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}.$$

b) On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'enfant monte au niveau C, avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ ,
- échec : l'enfant reste au niveau B, avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

La variable aléatoire  $X_2$  est égale au rang de premier succès.

$X_2$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$ .

$X_1$  et  $X_2$  suivent donc la même loi.

c) Le nombre d'instants nécessaire à l'enfant pour atteindre le sommet est égal au nombre d'instants nécessaire pour atteindre le niveau B augmenté du nombre d'instant supplémentaires nécessaires pour aller au niveau C. On a donc  $X = X_1 + X_2$ .

$$\text{On en déduit : } E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

## Exercice 4

1. a)  $I(A) = \int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \left[ -\frac{1}{t^\alpha} \right]_1^A = \left( -\frac{1}{A^\alpha} \right) - \left( -\frac{1}{1^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{A^\alpha}.$

b) ★ **Étude de la continuité**

- Sur  $]-\infty; 1[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]1; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ , donc  $f$  y est continue.

**Étude en 1 :**

- $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = f(1) = \alpha.$

Or  $\alpha \neq 0$ .  $f$  n'est donc pas continue en 1.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 1.

★ **Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty; 1[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .
- Sur  $]1; +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ , donc  $f(t) \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ **Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$**

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Sous réserve de convergence,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{A^\alpha} \right] = 1.$$

En définitive,  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. a)

$$J(A) = \int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha} dt = \left[ -\frac{\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_1^A = \left( -\frac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \right) - \left( -\frac{\alpha}{(\alpha-1)1} \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}.$$

b)  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} t f(t) dt$

$$\Leftrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_1^{+\infty} t \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^\alpha} dt. \text{ Sous réserve de convergence :}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^\alpha} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\alpha}{(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \right] = \frac{\alpha}{(\alpha-1)}.$$

Finalement,  $X$  admet une espérance et  $E(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)}.$



3.  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Si  $x < 1$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $x \geq 1$  : d'après la relation de Chasles,  $F(x) = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 0 + I(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}$ .

4. a) Dans cette question, on cherche à déterminer  $P(X \geq 2)$  puis  $P(2 \leq X \leq 3)$ .

$$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}.$$

b) Dans cette question, on cherche à déterminer  $P_{(X \geq 2)}(X \leq 3)$ .

$$P_{(X \geq 2)}(X \leq 3) = \frac{P((X \geq 2) \cap (X \leq 3))}{P(X \geq 2)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 2)} = \frac{5/36}{1/4} = \frac{5}{36} \times \frac{4}{1} = \frac{5}{9}.$$

5. a)  $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(e^{\ln(X)} \leq e^x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$ .

b) Pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $e^x \geq 1$  donc  $G(x) = F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^\alpha} = 1 - \frac{1}{e^{\alpha x}} = 1 - e^{-\alpha x}$ .

Pour tout réel  $x < 0$ ,  $e^x < 1$  donc  $G(x) = F(e^x) = 0$ .

c) On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

$Y$  suit donc la loi  $\mathcal{E}(\alpha)$ . On en déduit  $E(Y) = \frac{1}{\alpha}$  et  $V(Y) = \frac{1}{\alpha^2}$ .

6. a)  $E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\ln(X_i))$  par linéarité de l'espérance.

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

b)  $V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Y_i)$  car les  $X_i$  (donc les  $Y_i$ ) sont indépendantes.

$$\text{On a donc : } V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{n \alpha^2}.$$

7. `np.log(X)` est une matrice de 100 termes égaux à  $\ln(X_1)$ ,  $\ln(X_2)$ , ...,  $\ln(X_n)$  et `np.mean` en calcule la moyenne. Autrement dit, l'instruction `np.mean(np.log(X))` permet d'obtenir une estimation de  $\frac{1}{\alpha}$ . On estime finalement  $\alpha$  à 3. D'après la question

2. b), on estime  $E(X)$  par  $\frac{\alpha}{(\alpha-1)} = \frac{3}{2} = 1,5$  h.

# Ecricome 2017 Corrigé

## Exercice 1

### Partie I

$$1. \quad P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9-4 & 1-9+8 & 1+3-4 \\ 2-2 & 2+4 & 2-2 \\ 3-9+6 & 3+9-12 & 3-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I.$$

On en déduit que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

$$2. \quad M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 1+6+3 \\ 3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre 5.

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre 1.

$$M \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 2+3-3 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } M$$

associé à la valeur propre 2.

3. On observe que  $P$  est construite à partir des trois vecteurs propres précédents. Soit  $D$  la

matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  dont les éléments diagonaux sont les trois valeurs

propres associées au trois vecteurs propres précédents. Comme  $P$  est inversible, on en

déduit que, par construction,  $M$  est diagonalisable et  $M = PDP^{-1} = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ.$

4. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \frac{1}{6} PD^n Q$ .

- $\frac{1}{6} PD^0 Q = \frac{1}{6} (PIQ) = \frac{1}{6} \times 6I = I = M^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$M^n = \frac{1}{6} PD^n Q, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$M^{n+1} = M^n \times M = \frac{1}{6} PD^n Q \times \frac{1}{6} PDQ = \frac{1}{36} PD^n (QP) DQ = \frac{1}{36} PD^n (6I) DQ,$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = M^n \times M = \frac{1}{6} P(D^n D) Q = \frac{1}{6} PD^{n+1} Q. \text{ La propriété est vraie au rang } n+1.$$

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

5.  $D$  est diagonale donc  $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ . Dès lors :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 1 & 2 \times 2^n \\ 2 \times 5^n & 0 & 2^n \\ 3 \times 5^n & -1 & -3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} (PD^n) Q = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 5^n & 1 & 2 \times 2^n \\ 2 \times 5^n & 0 & 2^n \\ 3 \times 5^n & -1 & -3 \times 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ dont la première colonne est :}$$

$$\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 2 \times 2 \times 2^n \\ 2 \times 5^n + 0 - 2 \times 2^n \\ 3 \times 5^n - 9 + 2 \times 3 \times 2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

## Partie II

1. Le triathlète commence son entraînement par la natation le jour 0.

On en déduit :  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  et  $c_0 = 0$ .

D'après l'énoncé, puisque l'athlète a pratiqué la natation le jour 0, il pratiquera au jour 1 :

- la natation avec la probabilité  $1/5$
- le cyclisme avec la probabilité  $1/5$
- la course à pied avec la probabilité  $3/5$

On en déduit :  $a_1 = 1/5$ ,  $b_1 = 1/5$  et  $c_1 = 3/5$ .

2.  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  constituent un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n), \\
 \Leftrightarrow P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\
 \Leftrightarrow P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times \frac{1}{5} + P(B_n) \times \frac{2}{5} + P(C_n) \times 0 \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.
 \end{aligned}$$

On en déduit de la même façon :

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$$

3. On a donc :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M.$$

4. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$

- $A^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$  La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}. \text{ La propriété est vraie au rang } n+1.$$

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

On a bien :  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5}M\right)^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

5. Multiplier  $\frac{1}{5^n} M^n$  par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  revient à obtenir la première colonne de  $\frac{1}{5^n} M^n$ .

D'après la **partie I, question 5**, on a :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^n) - 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 1 - 4 \times (2/5)^n + 9/5^n \\ 2(1 - (2/5)^n) \\ 3(1 + (2/5)^n) - 9/5^n \end{pmatrix}.$$

6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$  car  $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ . On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

### Partie I

1. (a) On effectue 400 tirages identiques et indépendants à deux issues possibles :
- la boule noire est tirée, de probabilité  $\frac{1}{4}$
  - une boule blanche est tirée, de probabilité  $\frac{3}{4}$ .

$X$  compte le nombre de succès.

$X$  suit donc la loi binomiale de paramètres 400 et  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{On a : } X(\Omega) = \llbracket 0, 400 \rrbracket \text{ et } \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

$$(b) E(X) = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100 \text{ et } V(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 75.$$

2. (a) On effectue des tirages identiques et indépendants à deux issues possibles :

- la boule noire est tirée, de probabilité  $\frac{1}{4}$
- une boule blanche est tirée, de probabilité  $\frac{3}{4}$ .

$Y$  est le temps d'attente du premier succès.

$Y$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{On a : } Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), P(Y = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

$$(b) E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/4} = 4 \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{3/4}{1/16} = \frac{3}{4} \times 16 = 12.$$

3. Il y a au plus 4 tirages. Donc  $Z(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

Notons,  $N_n$  l'événement : « la boule rouge est obtenue au  $n$ -ième tirage ».

$$P(Z=1) = P(N_1) = \frac{1}{4} . \quad P(Z=2) = P(\bar{N}_1 \cap N_2) = P(\bar{N}_1) \times P_{\bar{N}_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} .$$

$$P(Z=3) = P(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 \cap N_3) = P(\bar{N}_1) \times P_{\bar{N}_1}(\bar{N}_2) \times P_{\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ d'après la}$$

formule des probabilités composées.

$$\text{Par suite, } P(Z=4) = 1 - P(Z=1) - P(Z=2) - P(Z=3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} .$$

$Z$  suit donc la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

$$(b) \text{ On en déduit : } E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2} \text{ et } V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} .$$

## Partie II

1. Les deux tirages étant successifs avec remise, il est possible d'obtenir soit 0 boule noire, soit 1 boule noire, soit 2 boules noires.  $T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .
2. Notons respectivement  $F$  et  $\bar{F}$  les événements « la pièce donne Face » et « la pièce donne Pile ».

$P$  et  $F$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T=0) = P(F) \times P_F(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2),$$

$$\Leftrightarrow P(T=0) = \frac{1}{2} \times P_F(\bar{N}_1) \times P_F(\bar{N}_2) + \frac{1}{2} \times P_{\bar{F}}(\bar{N}_1) \times P_{\bar{F}}(\bar{N}_2).$$

Car les événements  $\bar{N}_1$  et  $\bar{N}_2$  sont indépendants que l'on considère un tirage dans l'urne  $\mathcal{U}$  ou un tirage dans l'urne  $\mathcal{V}$ . On a donc :

$$P(T=0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9+4}{32} = \frac{13}{32} .$$

De la même façon,

$$P(T=2) = P(F) \times P_F(N_1 \cap N_2) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(N_1 \cap N_2),$$

$$\Leftrightarrow P(T=2) = \frac{1}{2} \times P_F(N_1) \times P_F(N_2) + \frac{1}{2} \times P_{\bar{F}}(N_1) \times P_{\bar{F}}(N_2),$$

$$\Leftrightarrow P(T=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1+4}{32} = \frac{5}{32} .$$

$$\text{On en déduit, } P(T=1) = 1 - P(T=0) - P(T=2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} .$$

$$3. E(T) = 0 \times P(T=0) + 1 \times P(T=1) + 2 \times P(T=2) = 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{7+5}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Si  $T$  suit une loi binomiale, on a  $np = \frac{3}{4} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$  car  $n = 2$ . Par suite, on aurait :

$$P(T=0) = (1-p)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}. \text{ Ce qui n'est pas. } T \text{ ne suit donc pas une loi binomiale.}$$

$$4. \text{ Calculons } P_{[T=1]}(U). P_{[T=1]}(U) = \frac{P(U \cap [T=1])}{P([T=1])} = \frac{P(U) \times P_U([T=1])}{P([T=1])},$$

$$\Leftrightarrow P_{[T=1]}(U) = \frac{P(U) \times [P_U(\bar{N}_1 \cap N_2) + P_U(N_1 \cap \bar{N}_2)]}{P([T=1])},$$

$$\Leftrightarrow P_{[T=1]}(U) = \frac{1/2 \times [3/4 \times 1/4 + 1/4 \times 3/4]}{7/16} = \frac{3/16}{7/16} = \frac{3}{7}.$$

On en déduit que  $P_{[T=1]}(V) = \frac{4}{7}$  et qu'il est plus probable d'avoir obtenu Face.

5.  $T=0$

```
for k in range (2):
 if rd.randint(4)<2:
 T=T+1
```

## Exercice 3

### Partie I

1.  $\ln(x)$  existe lorsque  $x > 0$ , ce qui garantit au passage l'existence de  $\frac{\ln(x)}{x^3}$ .

$f$  est donc définie sur  $]0, +\infty[$ .

2.  $x^3 > 0$  car  $x > 0$ , donc  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]1, +\infty[$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$  par croissances comparées. Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Graphiquement, l'axe des

abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0^+$  } Par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Graphiquement, l'axe des

ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$ .

4.  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ .

$$f'(x) = \frac{(4\ln(x))'(x^3) - (x^3)'(4\ln(x))}{(x^3)^2} = \frac{4/x \times x^3 - 3x^2 \times 4\ln(x)}{x^6},$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{4x^2 - 3x^2 \times 4\ln(x)}{x^6} = \frac{4x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6} = \frac{4(1 - 3\ln(x))}{x^4}.$$

$4 > 0$  et  $x^4 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - 3\ln(x)$ .

$1 - 3\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow -3\ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{3}}$  car la fonction  $\exp$  est strictement

croissante sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit :

| $x$     | 0         | $e^{\left(\frac{1}{3}\right)}$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0                                 | -         |
| $f$     | $-\infty$ | $f(e^{\left(\frac{1}{3}\right)})$ | 0         |

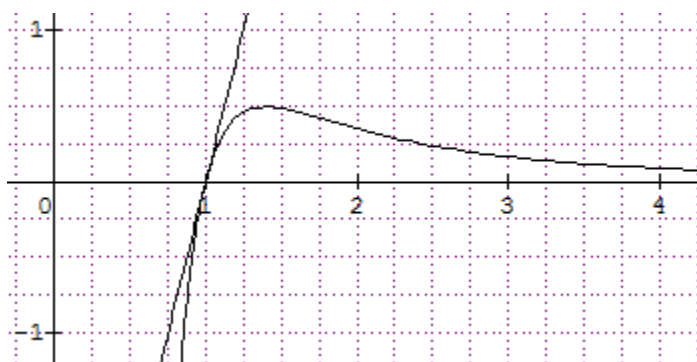
$$f\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{4 \times \frac{1}{3}}{e^1} = \frac{4}{3e}.$$

5. On a :  $f(1) = \frac{4\ln(1)}{1^3} = 0$  et  $f'(1) = \frac{4(1 - 3\ln(1))}{1^4} = 4$ .

Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 0 = 4x - 4.$$

6.





## Partie II

1. Les fonctions  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties. On pose :  $u(x) = 4\ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{4}{x}$  et  $v'(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{2x^2}$ .

$$\int_1^A uv' = [uv]_1^A - \int_1^A u'v, \text{ donc } \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = \left[ 4\ln(x) \times \frac{-1}{2x^2} \right]_1^A - \int_1^A \frac{4}{x} \times \frac{-1}{2x^2} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = \left[ \frac{-2\ln(x)}{x^2} \right]_1^A + \int_1^A \frac{2}{x^3} dx = \frac{-2\ln(A)}{A^2} + \frac{2\ln(1)}{1^2} + \left[ \frac{-1}{x^2} \right]_1^A,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = \frac{-2\ln(A)}{A^2} - \frac{1}{A^2} + \frac{1}{1^2} = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

2. Étudions la continuité de  $h$  :

- sur  $] -\infty, 1[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h$  est continue sur  $] -\infty, 1[$ .
- sur  $]1, +\infty[$ ,  $h(x) = f(x)$ . Donc  $h$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$ .  $h$  est donc continue en 1.

Finalement,  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Étudions la positivité de  $h$  :

- sur  $] -\infty, 1[$ ,  $h(x) = 0$ . Donc  $h(x) \geq 0$  sur  $] -\infty, 1[$ .
- Sur  $]1, +\infty[$ ,  $h(x) = f(x)$ . Or, d'après la question 2. De la **partie I** :  
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]1, +\infty[$ . Donc  $h(x) \geq 0$  sur  $]1, +\infty[$ .

Finalement,  $h(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

Calculons, si elle existe,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  :

- d'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^1 h(x) dx + \int_1^{+\infty} h(x) dx$ ,
- $\int_{-\infty}^1 h(x) dx = 0$  car  $h(x) = 0$  sur  $] -\infty, 1[$ ,
- sous réserves de convergence,  $\int_1^{+\infty} h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A h(x) dx$  ; or, d'après la question

précédente,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2} \right)$ .

De plus,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^2} = 0$  et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(A)}{A^2} = 0$  par croissances comparées.

On en déduit que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2} \right) = 1$ .

Donc  $\int_1^{+\infty} h(x) dx$  converge et  $\int_1^{+\infty} h(x) dx = 1$ .

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 0 + 1 = 1$ .

$h$  est donc bien une densité de probabilité.

3. (a) Par définition,  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt$ .

- Si  $x < 1$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

- Si  $x \geq 1$ , d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 h(t) dt + \int_1^x h(t) dt = 0 + \int_1^x h(t) dt = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln(x)}{x^2} \text{ d'après la question}$$

1. de la **partie II**.

(b) `return 0`

`return 1-1/x**2-2/x**2*np.log(x)`

(c) On obtient la représentation graphique de  $F$  sur  $[-2, 5]$  (subdivisé en 300).

4.  $\int_1^A x h(x) dx = \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^2} dx$

Les fonctions  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sont continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

On intègre par parties. On pose :  $u(x) = 4 \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{4}{x}$  et  $v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x}$ .

$$\int_1^A uv' = [uv]_1^A - \int_1^A u'v, \text{ donc } \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^2} dx = \left[ 4 \ln(x) \times \frac{-1}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{4}{x} \times \frac{-1}{x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^2} dx = \left[ \frac{-4 \ln(x)}{x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{x^2} dx = \frac{-4 \ln(A)}{A} + \frac{4 \ln(1)}{1} + \left[ \frac{-4}{x} \right]_1^A,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^2} dx = \frac{-4 \ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4 = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4 \ln(A)}{A}.$$

$X$  admet une espérance si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx$  converge. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx = \int_{-\infty}^1 x h(x) dx + \int_1^{+\infty} x h(x) dx = \int_{-\infty}^1 x \times 0 dx + \int_1^{+\infty} x h(x) dx = \int_1^{+\infty} x h(x) dx.$$

Sous réserve de convergence,  $\int_1^{+\infty} x h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x h(x) dx$ .

$$\text{D'après ce qui précède, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 4 - \frac{4}{A} - \frac{4 \ln(A)}{A} \right).$$

Or,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$  et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$  par croissances comparées.

On en déduit que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 4 - \frac{4}{A} - \frac{4 \ln(A)}{A} \right) = 4$ .

Donc  $\int_1^{+\infty} x h(x) dx$  converge et  $\int_1^{+\infty} x h(x) dx = 4$ .

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx = 0 + 4 = 4$ .

$X$  admet une espérance et  $E(X) = 4$ .

5.  $X$  admet une variance si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx$  converge. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx = \int_{-\infty}^1 x^2 h(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 h(x) dx = \int_{-\infty}^1 x^2 \times 0 dx + \int_1^{+\infty} x^2 h(x) dx = \int_1^{+\infty} x^2 h(x) dx.$$

Sous réserve de convergence,  $\int_1^{+\infty} x^2 h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^2 h(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} 4 \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$ .

Or,  $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x)$  est de la forme  $u'u$  avec  $u(x) = \ln(x)$  dont une primitive est de la forme  $\frac{u^2}{2}$ , donc dont une primitive est  $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$ . On a donc :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} 4 \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} 4 \left[ \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2(\ln(A))^2 - 2(\ln(1))^2) = +\infty.$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx$  diverge et  $X$  n'admet pas de variance.

$$6. P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P((X > A) \cap (X > 2A))}{P((X > A))} = \frac{P((X > 2A))}{P((X > A))} = \frac{1 - F(2A)}{1 - F(A)},$$

$$\Leftrightarrow P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1 - \left( 1 - \frac{1}{(2A)^2} - \frac{2 \ln(2A)}{(2A)^2} \right)}{1 - \left( 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2 \ln(A)}{A^2} \right)} = \frac{\frac{1}{(2A)^2} + \frac{2 \ln(2A)}{(2A)^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2 \ln(A)}{A^2}},$$

$$\Leftrightarrow P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{\frac{1 + 2 \ln(2A)}{4A^2}}{\frac{1 + 2 \ln(A)}{A^2}} = \frac{1 + 2 \ln(2A)}{4A^2} \times \frac{A^2}{1 + 2 \ln(A)} = \frac{1 + 2 \ln(2A)}{4 + 8 \ln(A)}.$$

$$\text{Enfin, } \frac{1 + 2 \ln(2A)}{4 + 8 \ln(A)} = \frac{1 + 2 \ln(2) + 2 \ln(A)}{4 + 8 \ln(A)} = \frac{\ln(A) \left( \frac{1 + 2 \ln(2)}{\ln(A)} + 2 \right)}{\ln(A) \left( \frac{4}{\ln(A)} + 8 \right)} = \frac{\left( \frac{1 + 2 \ln(2)}{\ln(A)} + 2 \right)}{\left( \frac{4}{\ln(A)} + 8 \right)}.$$

$$\text{Or, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(2)}{\ln(A)} = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{4}{\ln(A)} = 0. \text{ On en déduit : } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(2A)}{4 + 8 \ln(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

# ESCP 2017 Corrigé

## Exercice 1

1. a) Calculons :

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+0 & 2-1+0 & 0+1+0 \\ -6+3+1 & -3+1+0 & 0-1-1 \\ 2+0-1 & 1+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+1 & 1-1+0 & 0+1-1 \\ -4+6-2 & -2+2+0 & 0-2+2 \\ 2-3+1 & 1-1+0 & 0+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Supposons que  $M$  soit inversible.  $M^3 = O \Leftrightarrow M^{-1} \times M^3 = M^{-1} \times O \Leftrightarrow M^2 = O$ .

Ce qui n'est pas. L'hypothèse de départ est donc fausse.  $M$  n'est pas inversible.

b) Pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $M^n = M^{n-3} \times M^3 = M^{n-3} \times O = O$ .

c)  $(I - M)(I + M + M^2) = I + M + M^2 - M - M^2 - M^3 = I - M^3 = I$ .

On en déduit que  $I - M$  est inversible et que

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) On a vu que  $M^3 = O$ .  $X^3$  est donc un polynôme annulateur de  $M$ .

e) 0 est la seule racine de  $X^3$ . 0 est donc la seule valeur propre possible de  $M$ .

2. a)  $S = I + M$ .  $I$  et  $M$  commutent. On en déduit, d'après la formule du binôme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S^n = (I + M)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} M^k = \binom{n}{0} I^n M^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} M^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} M^2 + O \text{ puisque}$$

pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $M^n = O$ . On a donc :  $S^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2$ .

b) La deuxième colonne de  $S^n$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 + n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 - n - 2 \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 + 0 + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} \\ 1 - n - (n^2 - n) \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^2 + n}{2} \\ 1 - n - n^2 + n \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^2 + n}{2} \\ 1 - n^2 \\ \frac{n^2 - n}{2} \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ a) } S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (I + M) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + v_n \\ -3u_n + w_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}.$$

b) Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$  :

- $S^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ . La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S \times S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

c) On en déduit  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On obtient la deuxième colonne de  $S^n$ .

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^2 + n}{2} \\ 1 - n^2 \\ \frac{n^2 - n}{2} \end{pmatrix}. \text{ Par identification, } u_n = \frac{n^2 + n}{2}, v_n = 1 - n^2 \text{ et } w_n = \frac{n^2 - n}{2}.$$

$$u_n + v_n + w_n = \frac{n^2 + n}{2} + 1 - n^2 + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} + 1 - n^2 = n^2 + 1 - n^2 = 1.$$

$$4. \text{ a) } V = -MU = - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$W = M^2U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -2+2+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 1-2+1 & 0-1+1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $P$  est inversible et  $P^{-1} = P$ .

c)

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ -4+3+0 & -2+1+0 & 0-1+0 \\ 2-3+1 & 1-1+0 & 0+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(PM)P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+0 & 0-1+0 & 0+0+0 \\ -1+2-1 & 0+1-1 & 0+0-1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

1.  $u_2 = \frac{u_1^2}{u_1 + v_1} = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$  et  $v_2 = \frac{v_1^2}{u_1 + v_1} = \frac{2^2}{1+2} = \frac{4}{3}$ .

$$u_3 = \frac{u_2^2}{u_2 + v_2} = \frac{(1/3)^2}{1/3 + 4/3} = \frac{1/9}{5/3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{15} \text{ et}$$

$$v_3 = \frac{v_2^2}{u_2 + v_2} = \frac{(4/3)^2}{1/3 + 4/3} = \frac{16/9}{5/3} = \frac{16}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{16}{15}.$$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  :

- $u_1 = 1 > 0$  et  $v_1 = 2 > 0$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n > 0$  et

$$v_n > 0, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 : u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} > 0 \text{ et}$$

$$v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} > 0.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

3.  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$  car  $u_n > 0$  et

$$v_n > 0.$$

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n = \frac{v_n^2 - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n^2 - v_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0 \quad \text{car } u_n > 0 \quad \text{et } v_n > 0.$$

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

Les deux suites sont décroissantes et minorées par 0. Elles sont convergentes.

$$4. \text{ a) } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = u_n - v_n.$$

La suite  $(u_n - v_n)$  est donc constante, et  $u_n - v_n = u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$ .

On en déduit :  $u_n = v_n - 1$ . Par passage à la limite,  $\ell = \ell' - 1$ .

**b) Erreur d'énoncé.**

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \Leftrightarrow u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2.$$

Par passage à la limite :  $\ell(\ell + \ell') = \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell\ell' = \ell^2 \Leftrightarrow \ell\ell' = 0$ .

c)  $\ell\ell' = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$  ou  $\ell' = 0$ . Or, comme  $\ell = \ell' - 1$ , si  $\ell' = 0$ ,  $\ell = -1$  ce qui est impossible puisque  $u_n > 0$ . On en déduit  $\ell = 0$  et  $\ell' = 1$ .

$$5. \quad u = u ** 2 / (u + v)$$

$$6. \quad v = v ** 2 / (a + v)$$

Attention à utiliser « a » et non « u » en 6. car « u » a été modifié en ligne 5. entre-temps.

6. a) « s » est une matrice ligne de longueur  $n$  qui stocke les valeurs  $u_k$  pour  $k$  allant de 1 à  $n$ .

« y » est une matrice ligne de longueur  $n$  qui stocke les sommes cumulées des  $u_k$ ,

c'est-à-dire les valeurs  $\sum_{i=1}^k u_i$  pour  $k$  allant de 1 à  $n$ .

b) Il semble que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k \approx 1,4$ .

### Exercice 3

#### 1. ★ Étude de la continuité

- Sur  $]-\infty ; -1[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]-1 ; 0[$ ,  $f(x) = \frac{1-a}{2}$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]0 ; 1[$ ,  $f(x) = \frac{1+a}{2}$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]1 ; +\infty[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f$  y est continue.

$f$  est donc continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

#### ★ Étude de la positivité

- Sur  $]-\infty ; -1[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f(x) \geq 0$ .
- Sur  $[-1 ; 0]$ ,  $f(x) = \frac{1-a}{2}$ , donc  $f(x) \geq 0$  car  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ .
- Sur  $]0 ; 1]$ ,  $f(x) = \frac{1+a}{2}$ , donc  $f(x) \geq 0$  car  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ .
- Sur  $]1 ; +\infty[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f(x) \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} dx + \int_1^{+\infty} 0 dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 0 + \frac{1-a}{2} [x]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} [x]_0^1 + 0 = \frac{1-a}{2} (0 - (-1)) + \frac{1+a}{2} (1 - 0) \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \frac{1-a}{2} \times 1 + \frac{1+a}{2} \times 1 = \frac{1-a+1+a}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

En définitive,  $f$  est une densité de probabilité.

2. Calculons, si elle existe,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} x f(x) dx + \int_{-1}^0 x f(x) dx + \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{+\infty} x f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} x \times 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} x dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} x dx + \int_1^{+\infty} x \times 0 dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= 0 + \frac{1-a}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 0 = \frac{1-a}{2} \left( 0 - \left( \frac{1^2}{2} \right) \right) + \frac{1+a}{2} \left( \frac{1^2}{2} - 0 \right) \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \frac{1-a}{2} \times \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{1+a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-1+a+1+a}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,  $E(X) = \frac{a}{2}$ .

Calculons, si elle existe,  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ .

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x) dx + \int_{-1}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} x^2 \times 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} x^2 dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} x^2 dx + \int_1^{+\infty} x^2 \times 0 dx \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= 0 + \frac{1-a}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 0 = \frac{1-a}{2} \left( 0 - \left( \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) + \frac{1+a}{2} \left( \frac{1^3}{3} - 0 \right) \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1-a}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1+a}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1-a+1+a}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dès lors, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{4-3a^2}{12}.$$

3.  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

- Si  $x < -1$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$

- Si  $-1 \leq x \leq 0$  d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^x f(x) dx = 0 + \int_{-1}^x \frac{1-a}{2} dx = \frac{1-a}{2}(x+1)$$

- Si  $0 < x \leq 1$  d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^x f(x) dx = F(0) + \int_0^x \frac{1+a}{2} dx = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2}x$$

- Si  $x > 1$ , d'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 f(x) dx + \int_1^x f(x) dx = F(1) + \int_1^x 0 dx = 1 + 0 = 1$$

$$\text{En définitive, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1-a}{2}(x+1) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2}x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

4. a)  $E(Y_n) = E(2\overline{X}_n) = E\left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$  par linéarité de l'espérance.

Or, pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $E(X_k) = \frac{a}{2}$ . On en déduit :

$$E(Y_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a}{2} = \frac{2}{n} \times \frac{na}{2} = a.$$

b)  $V(Y_n) = V(2\overline{X}_n) = 4V(\overline{X}_n) = 4V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{4}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$  car  $V(mX) = m^2 V(X)$ .

Par ailleurs, les variables  $X_k$  sont mutuellement indépendantes.

$$\text{Donc } V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

$$\text{Finalement, } V(Y_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{4-3a^2}{12} = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{4-3a^2}{12} = \frac{4-3a^2}{3n}.$$

c)  $Y_n$  admet une variance donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon\right]\right) &\leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\left(\left[|Y_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{4 - 3a^2}{3n\varepsilon^2} \\ &\Leftrightarrow -P\left(\left[|Y_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) \geq -\frac{4 - 3a^2}{3n\varepsilon^2} \\ &\Leftrightarrow 1 - P\left(\left[|Y_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) \geq 1 - \frac{4 - 3a^2}{3n\varepsilon^2} \\ &\Leftrightarrow P\left(\left[|Y_n - a| \leq \varepsilon\right]\right) \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2} + \frac{3a^2}{3n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

5. a) Pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$  :

$$P\left(X_k \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{4} = \frac{2-2a+1+a}{4} = \frac{3-a}{4}.$$

$$P\left(X_k > \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3-a}{4} = \frac{4-3+a}{4} = \frac{1+a}{4}.$$

On effectue  $n$  épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : la variable aléatoire  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ , avec la probabilité  $\frac{3-a}{4}$ ,
- échec : la variable aléatoire  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ , avec la probabilité  $\frac{1+a}{4}$ .

La variable aléatoire  $Z_n$  compte le nombre de succès.

$Z_n$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{3-a}{4}$ .

De la même façon,  $T_n$  compte le nombre d'« échecs ».  $T_n$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1+a}{4}$ .

b)  $E(W_n) = E\left(1 + \frac{2}{n}(T_n - Z_n)\right) = 1 + \frac{2}{n}E(T_n - Z_n) = 1 + \frac{2}{n}(E(T_n) - E(Z_n))$  par linéarité de

l'espérance. De plus,  $Z_n$  suit la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$  donc  $E(Z_n) = np = \frac{3-a}{4}n$ , et  $T_n$  suit

la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$  donc  $E(T_n) = np = \frac{1+a}{4}n$ .

Finalement,  $E(W_n) = 1 + \frac{2}{n}\left(\frac{1+a}{4}n - \frac{3-a}{4}n\right) = 1 + \frac{2}{n} \times n \left(\frac{1+a}{4} - \frac{3-a}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow E(W_n) = 1 + \left( \frac{1+a-3+a}{2} \right) = 1 + \frac{2a-2}{2} = 1 + a - 1 = a.$$

- c) Par construction, le nombre de variables aléatoires inférieures ou égales à  $\frac{1}{2}$  et du nombre de variables aléatoires supérieures à  $\frac{1}{2}$  est égale à  $n$ .  $T_n + Z_n = n$ .

Dès lors,  $V(T_n + Z_n) = V(n) = 0$ .

De plus,  $V(T_n + Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) + 2 \operatorname{cov}(T_n, Z_n)$ .

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{cov}(T_n, Z_n) = V(T_n + Z_n) - V(T_n) - V(Z_n).$$

Comme  $Z_n$  suit la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$ ,  $V(Z_n) = np(1-p) = \frac{(3-a)(1+a)}{16}n$ , et comme  $T_n$

suit la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$ , donc  $V(T_n) = np(1-p) = \frac{(3-a)(1+a)}{16}n$ .

Finalement,  $2 \operatorname{cov}(T_n, Z_n) = 0 - \frac{(3-a)(1+a)}{16}n - \frac{(3-a)(1+a)}{16}n = -\frac{(3-a)(1+a)}{8}n$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cov}(T_n, Z_n) = -\frac{(3-a)(1+a)}{16}n.$$

- d)  $V(T_n - Z_n) = V(T_n + (-Z_n)) = V(T_n) + V(-Z_n) + 2 \operatorname{cov}(T_n, -Z_n)$

$$\Leftrightarrow V(T_n - Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) - 2 \operatorname{cov}(T_n, Z_n)$$

$$\Leftrightarrow V(T_n - Z_n) = \frac{(3-a)(1+a)}{16}n + \frac{(3-a)(1+a)}{16}n + \frac{2(3-a)(1+a)}{16}n = \frac{(3-a)(1+a)}{4}n.$$

Dès lors,  $V(W_n) = V\left(1 + \frac{2}{n}(T_n - Z_n)\right) = \frac{4}{n^2}V(T_n - Z_n)$  car  $V(aX + b) = a^2V(X)$

$$\Leftrightarrow V(W_n) = \frac{4}{n^2}V(T_n - Z_n) = \frac{4}{n^2} \times \frac{(3-a)(1+a)}{4}n = \frac{(3-a)(1+a)}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3-a)(1+a)}{n} = 0.$$

### Exercice 4

1. a) Pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \text{ car la fonction carrée est croissante sur } [0,1]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0 \text{ car exp est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ car } e^{-1} \approx 0,4 > 0 \text{ et } e^0 = 1.$$

b) D'après ce qui précède, pour tout  $x \in [0,1]$ , pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 \leq e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n e^{-x^2} \leq x^n \text{ car } x^n \geq 0 \text{ sur } [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \text{ par intégration de l'encadrement,}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ . D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

2. a)  $f$  est dérivable sur  $[0,1]$  comme composée de fonctions dérivables.

$$(e^u)' = u'e^u. \text{ Donc } f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

$$\text{b) } I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1^2} - e^{-0^2}) = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

3. a) Les fonctions  $x \rightarrow x^{n+1}$  et  $x \rightarrow x e^{-x^2}$  sont continues et dérivables sur  $[0,1]$ .

$$\text{On pose } u(x) = x^{n+1} \text{ et } v'(x) = x e^{-x^2}.$$

$$u'(x) = (n+1)x^n \quad v(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\text{On intègre par parties : } \int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2} x^{n+1} e^{-x^2} \right]_0^1 + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}.$$

b) D'après la question précédente :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2I_{n+2} = nI_n + I_n - \frac{1}{e} \Leftrightarrow nI_n = 2I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e}.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}. \text{ On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{e}.$$

**4. a)**  $u_{n+1} = \frac{I_{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!}.$

Or,  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n - \frac{1}{2e}$ , donc  $I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2}I_{2n+1} - \frac{1}{2e} = (n+1)I_{2n+1} - \frac{1}{2e}.$

Il vient :  $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left( (n+1)I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \right) = \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}.$

On a donc :  $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{n!}$

$$u_{n-1} = u_{n-2} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n-1)!}$$

.....

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{2!}$$

$$u_1 = u_0 - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{1!}$$

En sommant termes à termes, on obtient :

$$u_n = u_0 - \frac{1}{2e} \times \left[ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right] = u_0 - \frac{1}{2e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ car } u_0 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

**b)** Finalement,  $\frac{I_{2n+1}}{n!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \Leftrightarrow I_{2n+1} = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$

**c)** D'après la question **4. a)**, on a :

$$u_k = u_{k-1} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \frac{I_{2k+1}}{k!} = \frac{I_{2k-1}}{(k-1)!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow I_{2k+1} = \frac{k! I_{2k-1}}{(k-1)!} - \frac{1}{2e} \times \frac{k!}{k!} \Leftrightarrow I_{2k+1} = k I_{2k-1} - \frac{1}{2e}.$$

On en déduit :

(4) :  $I = k * I - 1 / (2 * np.e)$

# ESC 2016 Corrigé

## Exercice 1

$$1. \text{ a) } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12-4 & -24+24+4 & 8-12 \\ 8-8-4 & -12+16+4 & 4-8 \\ -8+4 & 12-8 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+8 & -16-8 & 8 \\ -16+16+8 & 24-32-8 & -8+16 \\ -16+8 & 24-16 & -8+8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 16 & -24 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4A.$$

b)  $A^3 - 4A = O$ , donc  $X^3 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

Or,  $X^3 - 4X = X(X^2 - 4) = X(X-2)(X+2)$ . Les racines de  $X^3 - 4X$  sont donc  $-2$ ,  $0$  et  $2$ . Les valeurs propres possibles de  $A$  sont  $-2$ ,  $0$  et  $2$ .

$$c) AX = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6+2 \\ 2-4+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0X.$$

$X$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $0$ .

$$AY = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-2 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2Y.$$

$Y$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $2$ .

$$AZ = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 2-4 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2Z.$$

$Z$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-2$ .

d)  $P$  est la matrice construite à partir des trois vecteurs propres  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  et  $D$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les trois valeurs propres  $0$ ,  $2$  et  $-2$ . Par construction, les matrices  $A$ ,  $P$  et  $D$  vérifient donc  $AP = PD$ .

$AP = PD \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$  :  $A$  est diagonalisable.

2. a) Déterminons, si elle existe, la matrice inverse de  $P$  par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

La matrice de gauche est triangulaire donc  $P$  est inversible.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\text{On en déduit : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, A^n P = P D^n$ .

- $A^0 P = P = P D^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$A^n P = P D^n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} P = A \times A^n P = A \times P D^n = (A \times P) D^n = (P \times D) D^n = P D^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

c)  $D$  est diagonale donc  $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ .

De plus,  $A^n P = P D^n \Leftrightarrow A^n P P^{-1} = P D^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n = P D^n P^{-1}$ . Dès lors :

$$P D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & -2^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & -2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n + 2(-2)^n & -(-2)^n \\ -(-2)^n & 2(-2)^n & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $2(-2)^n = -(-2)(-2)^n = -(-2)^{n+1}$ , on a finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $AU_n = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ -2a_n + 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$

b) 1. import numpy as np  
2. A=np.array([[4,-6,2],[2,-4,2],[-2,2,0]])  
6. print(U[0,0])

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, U_n = A^n U_0$  :

- $A^0 U_0 = I_2 \times U_0 = U_0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $U_n = A^n U_0$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

d)  $A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n - (-2)^{n+1} - 2(-2)^n \\ -(-2)^{n+1} - 2(-2)^n \\ 2^n \end{pmatrix}$ . Donc :

$$A^n U_0 = \begin{pmatrix} -2^n - (-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ -(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit :  $a_n = -2^n$ ,  $b_n = 0$  et  $c_n = 2^n$ .



## Exercice 2

### Partie I

1. a) Déterminons la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $-2^+$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} x - 2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{par composée de limites, } \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x+2) = -\infty,$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x+2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} -x = 2 \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

De plus :

La droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}$ .

b)  $\frac{\ln(x+2)}{x} = \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x}.$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \text{ par c.c.} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = 0.$$

Remarque : l'utilisation « directe » des croissances comparées, permet de marquer quelques points.

$$f(x) = \ln(x+2) - x = x \left( \frac{\ln(x+2)}{x} - 1 \right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} - 1 = -1 \text{ d'après ce qui précède} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2.  $(\ln(u) - v)' = \frac{u'}{u} - v'.$   $f$  est dérivable sur  $] -2 ; +\infty[$  et :

$$f'(x) = \frac{(x+2)'}{x+2} - (x)' = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{1 - (x+2)}{x+2} = \frac{1 - x - 2}{x+2} = \frac{-x-1}{x+2}.$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

- $x+2 > 0$  car  $x > -2$ .
  - $f'(x)$  est du signe de  $-x-1$ .
- $$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

On en déduit le signe de  $f'(x)$  puis les variations de  $f$  :

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       |
| $f$     | $-\infty$ | $1$  | $-\infty$ |

$$f(-1) = \ln(-1+2) - (-1) = \ln(1) + 1 = 1$$

3. a) •  $f$  est continue sur  $]-1; +\infty[$   
 •  $f$  est strictement décroissante sur  $]-1; +\infty[$   
 •  $0 \in f(]-1; +\infty[) = ]-\infty; 1[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  sur  $]-1; +\infty[$ .

b)  $f(1) = \ln(1+2) - (1) = \ln(3) - 1 \approx 1,10 - 1 > 0$

$$f(2) = \ln(2+2) - (2) = \ln(4) - 2 = 2\ln(2) - 2 \approx 2 \times 0,69 - 2 < 0$$

Par construction,  $f(\alpha) = 0$ .

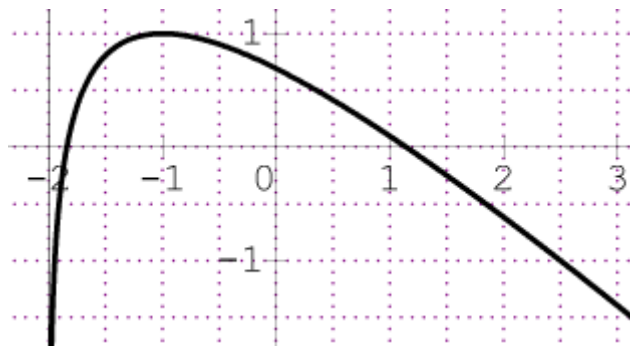
Donc  $f(2) < f(\alpha) < f(1) \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$  car  $f$  est strictement décroissante sur  $]-1; +\infty[$ .

4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x+2) - (1)(-x-1)}{(x+2)^2} = \frac{-x-2+x+1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} \leq 0.$$

$f$  est donc concave sur  $]-2; +\infty[$ .

5.



## Partie II

1. a) 2.  $u = [1]$

4.  $u = u + [\text{np} \cdot \log(u[i] + 2)]$

b) Il semble que la suite  $(u_n)$  soit croissante et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \approx 1,15$ .

2. a)  $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$g$  est dérivable sur  $[1; 2]$  et  $g'(x) = \frac{(x+2)'}{x+2} = \frac{1}{x+2} > 0$  car  $x > -2$ .

$g$  est donc strictement croissante sur  $[1; 2]$ .

b) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, 1 \leq u_n \leq 2$  :

- $u_1 = 1$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $1 \leq u_n \leq 2$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow g(1) \leq g(u_n) \leq g(2)$  car  $g$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$   
d'après la question précédente,

Donc  $1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow g(1) \leq u_{n+1} \leq g(2)$ .

Or,  $g(1) = \ln(3) \approx 1,10 > 1$  et  $g(2) = \ln(4) = 2\ln(2) \approx 2 \times 0,69 < 2$ .

Donc  $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, u_{n+1} \geq u_n$  :

- $u_1 = 1$  et  $u_2 = g(u_1) = g(1) = \ln(3) \geq 1 = u_1$ . La propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_{n+1} \geq u_n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow g(u_{n+1}) \geq g(u_n)$  car  $g$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$  et que  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  d'après la question précédente,

Donc  $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$ .

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée par 2. Elle est convergente vers un réel  $l$ .

3. a) Pour  $x \in [1; 2]$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = x \Leftrightarrow g(x) = x$ .

L'unique solution sur  $[1; 2]$  de l'équation  $f(x) = 0$  est donc également l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$  sur  $[1; 2]$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right)$  car  $g$  est continue sur  $[1; 2]$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(l).$$

$u_{n+1} = g(u_n)$  : on en déduit, par passage à la limite, que  $l = g(l)$ .

c) D'après la **partie I** et d'après la question 3. A) de la **partie II**, l'équation  $g(x) = x$  possède comme solution unique  $\alpha$  sur  $[1; 2]$ .

Comme  $l \in [1; 2]$  puisque  $\forall n \geq 1, 1 \leq u_n \leq 2$ , on en déduit que  $l = \alpha$ .

$(u_n)$  converge vers  $\alpha$  et, d'après le graphique,  $\alpha \approx 1,15$ .

### Exercice 3

1. a) On effectue 30 répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- le loup prélevé est pucé, de probabilité  $10/N$ ,
- le loup prélevé n'est pas pucé, de probabilité  $1 - 10/N = (N-10)/N$ .

$X$  compte le nombre de succès.  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres 30 et  $10/N$ .

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 30 \rrbracket \text{ et, pour tout } k \text{ de } X(\Omega), P(X = k) = \binom{30}{k} \left(\frac{10}{N}\right)^k \left(\frac{N-10}{N}\right)^{30-k}.$$

b)  $E(X) = n \times p = 30 \times \frac{10}{N} = \frac{300}{N}$  et  $V(X) = np(1-p) = \frac{300}{N} \times \frac{N-10}{N} = \frac{300(N-10)}{N^2}$ .

c) Par linéarité de l'espérance,  $E\left(\frac{X}{300}\right) = \frac{1}{300} E(X) = \frac{1}{300} \times \frac{300}{N} = \frac{1}{N}$ .

$$V\left(\frac{X}{300}\right) = \frac{1}{300^2} V(X) = \frac{1}{300^2} \times \frac{300(N-10)}{N^2} = \frac{N-10}{300N^2}.$$

2. a) On effectue des répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- le loup prélevé est pucé, de probabilité  $10/N$ ,
- le loup prélevé n'est pas pucé, de probabilité  $(N-10)/N$ .

$Y_1$  est le temps d'attente du premier succès.  $Y_1$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $10/N$ .

$$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \text{ de } Y_1(\Omega), P(Y_1 = k) = \frac{10}{N} \times \left(\frac{N-10}{N}\right)^{k-1}.$$

b)  $E(Y_1) = 1/(10/N) = N/10$ .

- c)  $Y_2$  et  $Y_3$  sont des temps d'attente de premier succès dans le cas de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre  $10/N$ .  $Y_2$  et  $Y_3$  suivent donc la même loi que  $Y_1$ .
- d) Le nombre total de loup prélevé est  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ .  
On en déduit  $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = N/10 + N/10 + N/10 = 3N/10$ .
- e) Par linéarité de l'espérance,  $E\left(\frac{10Y}{3}\right) = \frac{10}{3}E(Y) = \frac{10}{3} \times \frac{3N}{10} = N$ .
- f) À l'issue de l'expérience, une estimation de  $E(Y)$  est 33.  
Une estimation de  $N = E\left(\frac{10Y}{3}\right) = \frac{10}{3}E(Y)$  est donc  $\frac{10}{3} \times 33 = 110$ .

## Exercice 4

1. a)  $I(A) = \int_1^A \frac{2}{t^3} dt = \left[ -\frac{1}{t^2} \right]_1^A = -\frac{1}{A^2} + 1 = 1 - \frac{1}{A^2}$ .
- b) Montrons que  $f$  est une densité de probabilité :
- ★ Étude de la continuité de  $f$  :
- $f$  est continue sur  $] -\infty, 1[$  car  $f(t) = 0$ .
  - $f$  est continue sur  $] 1, +\infty[$  car  $f(t) = \frac{2}{t^3}$ .
  - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{1^3} = 2$ .  $f$  n'est donc pas continue en 1.
- Finalement,  $f$  est continue sur  $] -\infty, 1[ \cup ] 1, +\infty[$ .
- ★ Étude de la positivité de  $f$  :
- sur  $] -\infty, 1[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .
  - sur  $] 1, +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{2}{t^3}$ , donc  $f(t) \geq 0$  car  $t > 0$ .
- Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- ★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  :
- D'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt$ .
- Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt$ .

Sous réserves de convergence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{2}{t^3} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{A^2} = 1.$$

$$\text{En définitive, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + 1 = 1.$$

$f$  est donc bien une densité de probabilité.

$$2. \text{ Pour } x < 1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\text{Pour } x \geq 1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2}{t^3} dt,$$

$$F(x) = 0 + I(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

3. a) La probabilité que la durée de distribution soit d'au moins deux minutes est :

$$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

La probabilité que la durée de distribution soit de moins de trois minutes est :

$$P(X \leq 3) = F(3) = 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

La probabilité que la durée de distribution soit comprise entre 2 et 3 minutes est :

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{8}{9} - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{8}{9} - \frac{3}{4} = \frac{32 - 27}{36} = \frac{5}{36}.$$

b) La probabilité que le client reste moins d'une minute sachant qu'il est à la pompe depuis déjà 2 minutes est :

$$P_{(X \geq 2)}(X \leq 3) = \frac{P[(X \geq 2) \cap (X \leq 3)]}{P(X \geq 2)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 2)} = \frac{5/36}{1/4} = \frac{5}{36} \times \frac{4}{1} = \frac{5}{9}.$$

$$4. \text{ a) } J(A) = \int_1^A \frac{2}{t^2} dt = 2 \int_1^A \frac{1}{t^2} dt = 2 \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^A = 2 \left( 1 - \frac{1}{A} \right).$$

$$\text{On a donc : } \lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 - \frac{1}{A} \right) = 2.$$

$$\text{b) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} t f(t) dt \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 t \times 0 dt + \int_1^{+\infty} t \times \frac{2}{t^3} dt = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt.$$

$$\text{Or, sous réserves de convergence, } \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{2}{t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = 2.$$

On en déduit que  $X$  admet une espérance et  $E(X) = 0 + 2 = 2$ .

5. Le troisième client doit attendre qu'une des deux pompes soit libérée. Autrement dit :

$Y = \min(X_1, X_2)$ . On a donc  $(Y > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x)$ . Par suite,

$P(Y > x) = P((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) = P(X_1 > x) \times P(X_2 > x)$  car  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

$P(Y > x) = (1 - F(x))^2$  car  $P(X_1 > x) = P(X_2 > x) = 1 - F(x)$ .

6. a) La fonction de répartition de  $Y$  est :

$$G(x) = P(Y \leq x) = 1 - P(Y > x) = 1 - (1 - F(x))^2.$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} G(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0 & \text{si } x < 1 \\ G(x) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) Une densité de } Y \text{ est donnée par : } \begin{cases} G'(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ G'(x) = \frac{4}{x^5} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

## Ecricome 2016 Corrigé

### Exercice 1

1. (a) On a  $A - I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6+2 & -9+9-2 & -6+6-2 \\ 4-4+2 & -6+6-2 & -4+4-2 \\ -2+2-2 & 3-3+2 & 2-2+2 \end{pmatrix},$$

Donc  $(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . On en déduit :

$$(A - I)(A - 2I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - I)(A - 2I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 2-4+2 & -6+8-2 & -4+4+0 \\ 2-4+2 & -6+8-2 & -4+4+0 \\ -2+4-2 & 6-8+2 & 4-4+0 \end{pmatrix} = O_3.$$

$(X - 1)(X - 2)(X - 3)$  est donc un polynôme annulateur de  $A$  dont les racines évidentes sont 1, 2 et 3. Les valeurs propres possibles de  $A$  sont donc 1, 2 et 3.

(b)  $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+0 \\ 2-1+0 \\ -1+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-2 \\ 2+0-2 \\ -1+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre 2.



$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+2 \\ 2-1+2 \\ -1+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre 3.}$$

$P$  a bien été obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de  $A$ .

(c) Déterminons, si elle existe, la matrice inverse de  $P$  par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_2 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

La matrice de gauche est triangulaire donc  $P$  est inversible.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\text{On en déduit : } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) A \times P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+0 & 4+0-2 & 4-3+2 \\ 2-1+0 & 2+0-2 & 2-1+2 \\ -1+1+0 & -1+0+3 & -1+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$P \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+3 \\ 0+0+0 & 0+2+0 & 0+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$D$  satisfait la relation  $AP = PD$ . De plus,  $AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ .

(e) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, A^n = PD^nP^{-1}$ .

- $PD^0P^{-1} = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n = PD^nP^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = PD(P^{-1} \times P)D^nP^{-1} = P(DD^n)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(f)  $D$  est diagonale donc  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2^n+0 & 0+0+3^n \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+3^n \\ 0+0+0 & 0+2^n+0 & 0+0-3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. (a)  $AC + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-4 \\ 2+0-4 \\ -1+0+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = C.$

(b)  $AX_n + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n \\ 2u_n - v_n - 2w_n \\ -u_n + v_n + 3w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$

$$AX_n + B = \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, X_n = C - A^n C$ .

- $C - A^0 C = C - C = 0 = X_0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $X_n = C - A^n C$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$X_{n+1} = AX_n + B = A(C - A^n C) + B = AC - A^{n+1}C + B = AC + B - A^{n+1}C = C - A^{n+1}C$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(d) Finalement,  $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n+2-2 \times 3^n \\ -1+3^n+2-2 \times 3^n \\ 2^n-3^n+2 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n-2^n \\ 3^n-1 \\ 2-2^n-3^n \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

### Partie I

1. On pose  $a=1$ ,  $b=-2$ ,  $c=-3$ . Le discriminant du polynôme est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0.$$

$$P \text{ possède donc deux racines distinctes : } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3.$$

$P$  est du signe de  $a=1$  à l'extérieur des racines. On a donc :

|        |           |      |     |           |     |
|--------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $P(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

2.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 - x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x^2 - x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

3. (a)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $(uv)' = u'v + v'u$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3 + x^2 - x - 1)' (e^{-x}) + (e^{-x})' (x^3 + x^2 - x - 1), \\ \Leftrightarrow g'(x) &= (3x^2 + 2x - 1)(e^{-x}) + (-e^{-x})(x^3 + x^2 - x - 1) \\ \Leftrightarrow g'(x) &= e^{-x} [3x^2 + 2x - 1 - (x^3 + x^2 - x - 1)] \\ \Leftrightarrow g'(x) &= e^{-x} (3x^2 + 2x - 1 - x^3 - x^2 + x + 1) \\ \Leftrightarrow g'(x) &= e^{-x} (-x^3 + 2x^2 + 3x) = -x e^{-x} (x^2 - 2x - 3) = -x e^{-x} P(x) \end{aligned}$$

- (b) •  $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$  ;
- $e^{-x} > 0$  pour tout  $x$  réel ;
  - le signe de  $P(x)$  a été étudié en question 1.

On en déduit le tableau suivant :

| $x$        | $-\infty$                                                                          | $-1$ | $0$ | $3$ | $+\infty$ |   |   |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----|-----------|---|---|
| $-x$       | +                                                                                  | +    | 0   | -   | -         |   |   |
| $e^{(-x)}$ | +                                                                                  | +    | +   | +   | +         |   |   |
| $P(x)$     | +                                                                                  | 0    | -   | -   | 0         | + |   |
| $g'(x)$    | +                                                                                  | 0    | -   | 0   | +         | 0 | - |
| $g$        |  |      |     |     |           |   |   |

$$g(-1) = \left( (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 \right) e^{-(-1)} = (-1 + 1 + 1 - 1) e = 0,$$

$$g(0) = (0^3 + 0^2 - 0 - 1) e^{-0} = -1,$$

$$g(3) = (3^3 + 3^2 - 3 - 1) e^{-3} = (27 + 9 - 3 - 1) e^{-3} = 32 e^{-3}.$$

(c)  $g(1) = (1^3 + 1^2 - 1 - 1) e^{-3} = 0.$

On en déduit le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , d'après le tableau des variations de  $g$  :

- si  $x \leq 1$ ,  $g(x) \leq 0$  ;
- si  $x \geq 1$ ,  $g(x) \geq 0$ .

4. •  $g(1) = 0$  ;

- $g'(1) = -1 e^{-1} (1^2 - 2 \times 1 - 3) = 4 e^{-1}$  ;

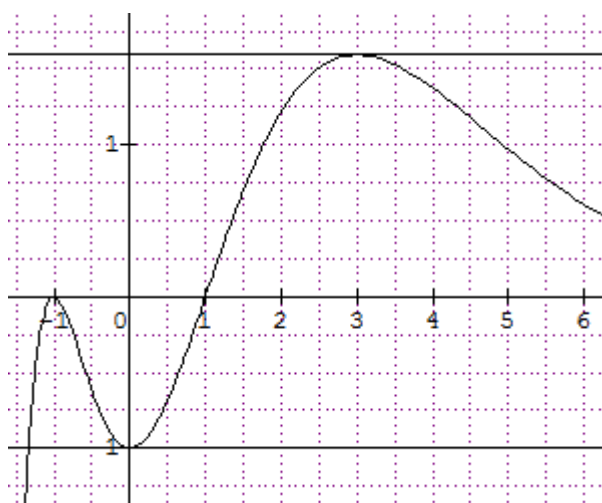
• Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1 est :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$\Leftrightarrow y = 4 e^{-1} (x-1) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{e} x - \frac{4}{e}.$$

5.



## Partie II

1. (a) Sous réserves de convergence,  $I_0 = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-x} dx$ .

$$\text{Or, } \int_1^A e^{-x} dx = \left[ -e^{-x} \right]_1^A = -e^{-A} - (-e^{-1}) = e^{-1} - e^{-A} \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-A}) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$I_0$  est une intégrale convergente égale à  $\frac{1}{e}$ .

(b) Les fonctions  $x \mapsto x^{n+1}$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues et dérivables sur  $[1, M]$ .

$$\text{On pose : } u(x) = x^{n+1} ; \quad v'(x) = e^{-x}$$

$$\text{On a : } u(x) = (n+1)x^n ; \quad v(x) = -e^{-x}$$

On intègre par parties :

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

$$\text{On a donc : } \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = \left[ -x^{n+1} e^{-x} \right]_1^M - \int_1^M (n+1)x^n (-e^{-x}) dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -M^{n+1} e^{-M} + 1^{n+1} e^{-1} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx.$$

(c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n$  converge.

- D'après la question 1 (a),  $I_0$  converge. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $I_n$  converge, montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

D'après la question précédente,

$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + (n+1) \int_1^M x^n e^{-x} dx$$

On en déduit :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + (n+1) \int_1^M x^n e^{-x} dx \right] = 0 + \frac{1}{e} + (n+1) I_n,$$

car  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{n+1}}{e^M} = 0$  par croissances comparées et car  $I_n$  converge.

On en déduit que  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{1}{e} + (n+1) I_n$  et que  $I_{n+1}$  converge.

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(d) Sous réserves de convergences,  $I_{n+1} = \int_1^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx$ .

Or, d'après la question précédente,  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$ .

On en déduit que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$ .

(e) On applique la formule précédente pour  $n = 0$ . Il vient :

$$I_1 = \frac{1}{e} + I_0 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

Par suite, on a :  $I_2 = \frac{1}{e} + 2I_1 = \frac{1}{e} + \frac{4}{e} = \frac{5}{e}$  puis  $I_3 = \frac{1}{e} + 3I_2 = \frac{1}{e} + \frac{15}{e} = \frac{16}{e}$ .

(f) 

```
import numpy as np
n=int(input("Donner un entier strictement positif "))
u=1/np.e
for k in range(1,n+1):
 u=1/np.e+k*u
print(u)
```

2. (a) Montrons que  $f$  est une densité de probabilité :

★ Étude de la continuité de  $f$  :

- $f$  est continue sur  $]-\infty, 1[$  car  $f(x) = 0$ .
- $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$  car  $f(x) = \frac{e}{18}g(x)$  et que  $g$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{e}{18}g(1) = 0$ .  $f$  est donc continue en 1.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

★ Étude de la positivité de  $f$  :

- sur  $]-\infty, 1[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f(x) \geq 0$ .
- sur  $]1, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{e}{18}g(x)$ , donc  $f(x) \geq 0$  car  $g(x) \geq 0$  sur  $]1, +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  :

D'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{e}{18}g(x) dx = \frac{e}{18} \int_1^{+\infty} (x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x} dx$ ,

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{e}{18} \left( \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx - \int_1^{+\infty} e^{-x} dx \right)$  par

linéarité de l'intégrale.

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{e}{18}g(x) dx = \frac{e}{18}(I_3 + I_2 - I_1 - I_0)$ ,

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{e}{18} \left( \frac{16}{e} + \frac{5}{e} - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} \right) = \frac{e}{18} \times \frac{18}{e} = 1.$$

$f$  est donc bien une densité de probabilité.

**(b)** Calculons, si elle existe,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  :

D'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 x f(x) dx + \int_1^{+\infty} x f(x) dx$ .

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{e}{18} x g(x) dx = \frac{e}{18} \int_1^{+\infty} (x^4 + x^3 - x^2 - x) e^{-x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{e}{18} (I_4 + I_3 - I_2 - I_1) \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

$$\text{En définitive, } Z \text{ admet une espérance et : } E(Z) = \frac{e}{18} \left( \frac{65}{e} + \frac{16}{e} - \frac{5}{e} - \frac{2}{e} \right) = \frac{e}{18} \times \frac{74}{e} = \frac{37}{9}$$

**(c)** Calculons, si elle existe,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$  :

D'après la relation de Chasles,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$ .

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{e}{18} x^2 g(x) dx = \frac{e}{18} \int_1^{+\infty} (x^5 + x^4 - x^3 - x^2) e^{-x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{e}{18} (I_5 + I_4 - I_3 - I_2) \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

$$Z^2 \text{ admet une espérance et : } E(Z^2) = \frac{e}{18} \left( \frac{326}{e} + \frac{65}{e} - \frac{16}{e} - \frac{5}{e} \right) = \frac{e}{18} \times \frac{370}{e} = \frac{185}{9}.$$

En définitive,  $Z$  admet une variance et :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{185}{9} - \left( \frac{37}{9} \right)^2 = \frac{9 \times 185 - 37 \times 37}{81} = \frac{1665 - 1369}{81} = \frac{296}{81}.$$

### Exercice 3

1. **(a)** La probabilité d'obtenir une paire de boules bleues lors du premier tirage est :

$$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{2}{6 \times 5} = \frac{1}{15}. \text{ De la même façon, la probabilité d'obtenir une paire de}$$

boules rouges lors du premier tirage est  $\frac{1}{15}$  et la probabilité d'obtenir une paire de

boules jaunes lors du premier tirage est  $\frac{1}{15}$ . Ainsi, la probabilité d'obtenir une paire

de boules de la même couleur lors du premier tirage est  $\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ .

**(b)** On effectue des répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- les deux boules prélevées sont de même couleur, de probabilité  $1/5$ ,
- les deux boules prélevées ne sont pas de même couleur, de probabilité  $4/5$ .

$Y_1$  est le temps d'attente du premier succès.  $Y_1$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $1/5$ .

$$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \text{ de } Y_1(\Omega), P(Y_1 = k) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/5} = 5 \text{ et } V(Y_1) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{4/5}{1/25} = 20.$$

**2. (a)** La probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage

$$\text{est : } \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{\frac{4 \times 3}{2}} + \frac{1}{\frac{4 \times 3}{2}} = \frac{2}{4 \times 3} + \frac{2}{4 \times 3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

**(b)** On effectue des répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- les deux boules prélevées sont de même couleur, de probabilité  $1/3$ ,
- les deux boules prélevées ne sont pas de même couleur, de probabilité  $2/3$ .

$Y_2$  est le temps d'attente du premier succès.  $Y_2$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $1/3$ .

$$Y_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \text{ de } Y_2(\Omega), P(Y_2 = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

$$E(Y_2) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/3} = 3 \text{ et } V(Y_2) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{2/3}{1/9} = 6.$$

**3. (a)**  $X$  est le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne, c'est à dire après avoir tiré trois fois deux boules de même couleur.  $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$ .

$$\text{(b)} E(X) = E(Y_1 + Y_2 + Y_3) = E(Y_1 + Y_2 + 1) = E(Y_1) + E(Y_2) + 1.$$

Donc  $E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + 1$  par linéarité de l'espérance.

$$\text{Finalement, } E(X) = 5 + 3 + 1 = 9.$$

Puisque les variables  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  sont indépendantes,

$$V(X) = V(Y_1) + V(Y_2) + V(Y_3) = 20 + 6 + 0 = 26.$$

$$\text{(c)} \text{ Notons que } [X = k] \Leftrightarrow [Y_1 + Y_2 + Y_3 = k] \Leftrightarrow [Y_1 + Y_2 + 1 = k] \Leftrightarrow [Y_1 + Y_2 = k - 1].$$

Par ailleurs, pour avoir  $Y_1 + Y_2 = k - 1$ , on peut avoir  $Y_1 = 1$  et  $Y_2 = k - 2$  ou  $Y_1 = 2$  et  $Y_2 = k - 3 \dots$  Les valeurs de  $Y_1$  allant de 1 à  $k - 2$  avec  $k \geq 3$ .

$$\text{On a donc : } [Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i]).$$



Les événements étant incompatibles, on a :

$$P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i]).$$

Enfin, les variables indépendantes, on a :

$$P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i) \times P(Y_2 = k - 1 - i)$$

$$(d) \text{ On a donc : } P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1-i-1},$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{15} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-i},$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{15} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{5}{4} \times \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^i \times \left(\frac{3}{2}\right)^i,$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{12}{10}\right)^i,$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{6}{5}\right)^i,$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left( \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} \right),$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{6}{5} \times \left( 1 + \left(\frac{6}{5}\right) + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^{k-3} \right),$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left( \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - 1}{\frac{6}{5} - 1} \right),$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times 5 \left( \left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - 1 \right),$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left( \left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \right),$$

$$\Leftrightarrow P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

4. (a) `u=[1/2*((4/5)**(k-2)-(2/3)**(k-2)) for k in range(3,23)]`

D'après le graphique, la valeur la plus probable de  $X$  semble être 5.

(b) Il s'agit d'utiliser la fonction `np.cumsum`. Graphiquement, il semblerait que pour

$$m = 7, P(X \leq 7) = P(X \geq 7) \approx 0,5.$$

# ESCP 2016 Corrigé

## Exercice 1

$$1. \text{ a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+1 & 0+0+1 \\ 0+0+1 & 0+0+1 & 0+0+1 \\ 0+0+1 & 0+0+1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+1 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+0+1 & 1+1+1 \\ 0+0+3 & 0+0+3 & 1+1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = O.$$

b)  $R(X) = X^3 - X^2 - 2X$  est donc un polynôme annulateur de  $A$ .

c) Déterminons les racines de  $R$  :  $R(X) = X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2)$ .

0 est racine évidente de  $R$ . Factorisons  $X^2 - X - 2$  : posons  $a=1$ ,  $b=-1$  et  $c=-2$  ;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2.$$

$X^2 - X - 2$  possède deux racines réelles :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Finalement, les racines de  $R$  sont :  $-1$ ,  $0$  et  $2$ .

d) Les racines d'un polynôme annulateur de  $A$  sont les valeurs propres possibles de  $A$ .

Les valeurs propres possibles de  $A$  sont  $-1$ ,  $0$  et  $2$ .

$$2. \text{ a) } AU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0-1 \\ 0+0-1 \\ 1+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -U_1.$$

$-1$  est valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $U_1$ .

$$AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0+0 \\ 1-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times U_2.$$

$0$  est valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $U_2$ .

$$AU_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+2 \\ 0+0+2 \\ 1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2U_3.$$

$2$  est valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $U_3$ .

$$\text{b) } P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+1 & 2-3+1 & -2+0+2 \\ 2-3+1 & 2+3+1 & -2+0+2 \\ -2+0+2 & -2+0+2 & 2+0+4 \end{pmatrix},$$

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I.$$

$$P \text{ est donc inversible et } P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } A \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0-1 & 0+0+0 & 0+0+2 \\ 0+0-1 & 0+0+0 & 0+0+2 \\ 1+1-1 & 1-1+0 & 1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$P \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+2 \\ -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+2 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement  $AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ .  $A$  est diagonalisable.

3. a) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, A^n = PD^n P^{-1}$ .

- $PD^1 P^{-1} = PDP^{-1} = A = A^1$  d'après la question précédente.

La propriété est vraie au rang 1.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$A^n = PD^n P^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^n P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^n P^{-1} = P(DD^n)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{b) } D \text{ est diagonale donc } D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ Dès lors :}$$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$A^n = (PD^n)P^{-1} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2 \times 2^n - 2(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2 \times 2^n - 2(-1)^n \\ 2 \times 2^n - 2(-1)^n & 2 \times 2^n - 2(-1)^n & 4 \times 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Remarque : il est pertinent de vérifier cette relation pour  $n=1$  ou  $n=0$ .

$$4. \text{ a) } A^2 \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1-1+0 & 1+1+2 \\ 1+1-1 & 1-1+0 & 1+1+2 \\ 1+1-3 & 1-1+0 & 1+1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$P \times D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4 \\ -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dès lors :

$$MP = (I - 2A + 5A^2)P = P - 2AP + 5A^2P = P - 2PD + 5PD^2 = P(I - 2D + 5D^2).$$

- b)  $D' = I - 2D + 5D^2$  est une matrice diagonale. Donc il existe une matrice  $D'$  telle que  $MP = PD' \Leftrightarrow M = PD'P^{-1}$ .  $M$  est donc diagonalisable.

$$D' = I - 2D + 5D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $M$  sont 1, 8 et 17.

## Exercice 2

1.  $u=1$

$$u = \text{np.log}(1+u**2)$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

- $u_0 = 1$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $0 \leq u_n \leq 1$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0^2 \leq u_n^2 \leq 1^2 \text{ car la fonction carrée est croissante sur } [0,1],$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } [1,2],$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \text{ car } \ln(1) = 0, u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2) \text{ et } \ln(2) \approx 0,7 \leq 1.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

3. a)  $f$  est dérivable sur  $[0,1]$ .

$$(\ln(u) - v)' = \frac{u'}{u} - v', \text{ donc :}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - (1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = \frac{-(x^2-2x+1)}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

$$\cdot (x-1)^2 \geq 0 \text{ car un carré est toujours positif.}$$

$$\cdot 1+x^2 \geq 1 > 0 \text{ car un carré est toujours positif.}$$

$$f'(x) \text{ est donc négative sur } [0,1].$$

$f$  est donc strictement décroissante sur  $[0,1]$ .

$$\text{De plus, } f(0) = \ln(1+0^2) - 0 = \ln(1) = 0 \text{ et } f(1) = \ln(1+1^2) - 1 = \ln(2) - 1 < 0.$$

On a donc :

|         |   |             |
|---------|---|-------------|
| $x$     | 0 | 1           |
| $f'(x)$ | - |             |
| $f$     | 0 | $\ln 2 - 1$ |

D'après le tableau de variations de  $f$ ,  $f$  étant continue sur  $[0,1]$ ,  $f(x) \leq 0$  sur  $[0,1]$ .

b) D'après la question précédente, pour tout  $x$  de  $[0,1]$ ,  $\ln(1+x^2) - x \leq 0$ .

Or, d'après la question 2., pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ . On applique donc  $x = u_n$ .

$$\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ln(1+u_n^2) - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante et minorée par 0. Elle est convergente.

4. a) Étudions, pour  $x$  réel positif, les variations de  $h(x) = x - \ln(1+x)$ .

$h$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

$$(u - \ln(v))' = u' - \frac{v'}{v}, \text{ donc } h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

$$\cdot x \geq 0 \text{ car } x \in [0; +\infty[.$$

$$\cdot 1+x \geq 0 \text{ car } x \in [0; +\infty[.$$

$$\text{Donc } h'(x) \geq 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

$$h \text{ est donc croissante sur } [0; +\infty[. \text{ Or, } h(0) = 0 - \ln(1) = 0.$$

$$h \text{ étant continue, on en déduit que } h(x) \geq 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

$$\text{Finalement, } x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x \text{ sur } [0; +\infty[.$$

b) D'après la question précédente, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^2 \geq 0$ . On applique donc  $x = u_n^2$ .

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln(1+u_n^2) \leq u_n^2 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n^2$ .

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, u_n \leq (\ln 2)^n$  :

- $u_1 = \ln 2 = (\ln 2)^1$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n \leq (\ln 2)^n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :  
 $u_{n+1} \leq u_n^2$  d'après la question précédente, donc :  
 $u_{n+1} \leq u_n \times u_n$ . Or, d'une part  $u_n \leq (\ln 2)^n$  par hypothèse de récurrence, d'autre part,  $u_n \leq u_1 = \ln(2)$  car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.  
Il vient :  $u_{n+1} \leq (\ln 2)^n \times \ln 2 = (\ln 2)^{n+1}$ .  
La propriété est vraie au rang  $n+1$ .
- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

d) On a finalement,  $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$ . Or,  $|\ln 2| < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$ .

D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

e) Ce programme effectue la recherche d'un seuil. Il permet de trouver le rang du premier terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $u_n \leq 0,0001$ .

$u_6$  est le premier terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  inférieur à 0,0001.

5. D'après la question 4. c, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq (\ln 2)^n$ .

On en déduit :  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \leq 1 + (\ln 2) + \dots + (\ln 2)^{n-1}$ .

Or,  $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$  pour  $q \neq 1$ . Donc  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1-(\ln 2)^n}{1-\ln 2}$ .

### Exercice 3

1. ★ Étude de la continuité de  $f$  :

Sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]a ; +\infty[$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $f$  est continue sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]a ; +\infty[$ .

Sur  $]0 ; a[$ ,  $f(x) = \frac{3x^2}{a^3}$ , donc  $f$  est continue sur  $]0 ; a[$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3 \times 0^2}{a^3} = 0$ . Donc  $f$  est continue en 0.

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{3 \times a^2}{a^3} = \frac{3}{a}$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ . Donc  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

Finalement,  $f$  est continue sur  $] -\infty ; a[ \cup ] a ; +\infty [$ .

★ Étude de la positivité de  $f$  :

Sur  $] -\infty ; 0[ \cup ] a ; +\infty [$ ,  $f(x) = 0 \geq 0$ , donc  $f$  est positive sur  $] -\infty ; 0[ \cup ] a ; +\infty [$ .

Sur  $[0 ; a]$ ,  $f(x) = \frac{3x^2}{a^3}$ , donc  $f$  est positive sur  $[0 ; a]$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  sous réserves de convergence :

D'après la relation de Chasles :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^a \frac{3x^2}{a^3} dx + \int_a^{+\infty} 0 dx = 0 + \left[ \frac{x^3}{a^3} \right]_0^a + 0 = \frac{a^3}{a^3} - \frac{0^3}{a^3} = 1.$$

On en déduit que  $f$  est bien une densité de probabilité.

2.  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

D'après la relation de Chasles :  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^a x f(x) dx + \int_a^{+\infty} x f(x) dx$

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx + \int_0^a x \times \frac{3x^2}{a^3} dx + \int_a^{+\infty} x \times 0 dx = 0 + \int_0^a \frac{3x^3}{a^3} dx + 0,$$

$$E(X) = \left[ \frac{3x^4}{4a^3} \right]_0^a = \frac{3a^4}{4a^3} - \frac{3 \cdot 0^4}{4a^3} = \frac{3}{4}a. X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{3}{4}a.$$

Par ailleurs,  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x) dx$

D'après la relation de Chasles :  $E(X^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^a x^2 f(x) dx + \int_a^{+\infty} x^2 f(x) dx$ ,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 \times 0 dx + \int_0^a x^2 \times \frac{3x^2}{a^3} dx + \int_a^{+\infty} x^2 \times 0 dx = 0 + \int_0^a \frac{3x^4}{a^3} dx + 0,$$

$$E(X^2) = \left[ \frac{3x^5}{5a^3} \right]_0^a = \frac{3a^5}{5a^3} - \frac{3 \cdot 0^5}{5a^3} = \frac{3}{5}a^2. X^2 \text{ admet une espérance et } E(X^2) = \frac{3}{5}a^2.$$

On en déduit que  $X$  admet une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5}a^2 - \left( \frac{3}{4}a \right)^2 = \frac{3}{5}a^2 - \frac{9}{16}a^2 = \frac{48-45}{80}a^2 = \frac{3}{80}a^2.$$

3. Par définition,  $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

Si  $x < 0$ ,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $0 \leq x \leq a$ ,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$  d'après la relation de Chasles.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{3t^2}{a^3} dt = 0 + \left[ \frac{t^3}{a^3} \right]_0^x = \frac{x^3}{a^3} - \frac{0^3}{a^3} = \left( \frac{x}{a} \right)^3.$$

Si  $x > a$ ,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$  d'après la relation de Chasles.

$$F_X(x) = F_X(a) + \int_a^x f(t) dt = \left( \frac{a}{a} \right)^3 + \int_a^x 0 dt = 1.$$

$$\text{Finalement, } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left( \frac{x}{a} \right)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

4. a)  $E(Y_n) = E\left(\frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$  par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_n) = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} a \text{ car pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(X_k) = \frac{3}{4} a,$$

$$E(Y_n) = \frac{4}{3n} \times \frac{3}{4} na \text{ par linéarité de l'espérance et car } \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

$$\text{Donc } E(Y_n) = a.$$

b)  $V(Y_n) = V\left(\frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \left(\frac{4}{3n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$  car  $V(aX) = a^2 V(X)$ .

$$V(Y_n) = \frac{16}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \text{ car les } n \text{ variables aléatoires } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes.}$$

$$V(Y_n) = \frac{16}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{16}{9n^2} \times \frac{3a^2}{80} \times n = \frac{a^2}{15n} \text{ car pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, V(X_k) = \frac{3a^2}{80}$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n 1 = n. \text{ On en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{15n} = 0.$$

c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète ou à densité. Si  $X$  admet une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|X - E(X)| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Appliquons cette inégalité à } X = Y_n : \forall \varepsilon > 0, P\left(\left[|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Or une probabilité est toujours positive et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n) = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = 0.$$

$$\text{Par théorème d'encadrement, } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[|Y_n - a| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$



5. a)  $P([Z_n \leq x]) = P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x])$   
 $\Leftrightarrow P([Z_n \leq x]) = P([X_1 \leq x]) \times \dots \times P([X_n \leq x])$  par indépendance des  $X_1, \dots, X_n$ ,  
 $\Leftrightarrow H_n(x) = (F_X(x))^n$  car les variables  $X_1, \dots, X_n$  suivent toutes la même loi de fonction de répartition  $F_X(x)$ .

$$\text{On en déduit : } H_n(x) = (F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{3n} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

- b)  $H_n$  est dérivable partout sauf, peut-être en 0 et en  $a$ .

Une densité  $h_n$  de  $Z_n$  est donc :  $h_n(x) = H'_n(x)$ .

$$\text{C'est-à-dire : } h_n(x) = \begin{cases} 3n \times \frac{1}{a} \times \left(\frac{x}{a}\right)^{3n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- c)  $E(Z_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_n(x) dx$ . D'après la relation de Chasles :

$$E(Z_n) = \int_{-\infty}^0 x h_n(x) dx + \int_0^a x h_n(x) dx + \int_a^{+\infty} x h_n(x) dx,$$

$$E(Z_n) = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx + \int_0^a x \times \frac{3n}{a} \frac{x^{3n-1}}{a^{3n-1}} dx + \int_a^{+\infty} x \times 0 dx = 0 + \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n} dx + 0,$$

$$E(Z_n) = \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n} dx = \left[ \frac{3n}{a^{3n}} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right]_0^a = \frac{3n}{a^{3n}} \frac{a^{3n+1}}{3n+1} - \frac{3n}{a^{3n}} \frac{0^{3n+1}}{3n+1} = \frac{3n}{3n+1} a.$$

$$b(Z_n) = E(Z_n) - a = \frac{3n}{3n+1} a - a = \frac{3n - (3n+1)}{3n+1} a = \frac{-1}{3n+1} a.$$

- d)  $r(Z_n) = V(Z_n) + (b(Z_n))^2 = E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2 + (b(Z_n))^2$ .

Calculons  $E(Z_n^2)$  :  $E(Z_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h_n(x) dx$ . D'après la relation de Chasles :

$$E(Z_n^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 h_n(x) dx + \int_0^a x^2 h_n(x) dx + \int_a^{+\infty} x^2 h_n(x) dx,$$

$$E(Z_n^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 \times 0 dx + \int_0^a x^2 \times \frac{3n}{a} \frac{x^{3n-1}}{a^{3n-1}} dx + \int_a^{+\infty} x^2 \times 0 dx = 0 + \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n+1} dx + 0,$$

$$E(Z_n^2) = \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n+1} dx = \left[ \frac{3n}{a^{3n}} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} \right]_0^a = \frac{3n}{a^{3n}} \frac{a^{3n+2}}{3n+2} - \frac{3n}{a^{3n}} \frac{0^{3n+2}}{3n+2} = \frac{3n}{3n+2} a^2.$$

$$Z_n^2 \text{ admet une espérance et } E(Z_n^2) = \frac{3n}{3n+2} a^2.$$

$$r(Z_n) = \frac{3n}{3n+2}a^2 - \frac{9n^2}{(3n+1)^2}a^2 + \frac{1}{(3n+1)^2}a^2 = \frac{3n(3n+1)^2 + (-9n^2+1)(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2,$$

$$r(Z_n) = \frac{3n(9n^2+6n+1) + (-9n^2+1)(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2,$$

$$r(Z_n) = \frac{(27n^3+18n^2+3n) + (-27n^3-18n^2+3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2,$$

$$r(Z_n) = \frac{27n^3+18n^2+3n-27n^3-18n^2+3n+2}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2 = \frac{6n+2}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2,$$

$$r(Z_n) = \frac{2(3n+1)}{(3n+2)(3n+1)^2}a^2 = \frac{2a^2}{(3n+2)(3n+1)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r(Z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a^2}{(3n+2)(3n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a^2}{9n^2} = 0.$$

6. a) On rappelle que  $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$  ou  $-x \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ .

En posant  $x = Z_n - a$ , on a :  $|Z_n - a| \geq \theta \Leftrightarrow Z_n - a \geq \theta$  ou  $Z_n - a \leq -\theta$  ou encore :

$$[|Z_n - a| \geq \theta] = [Z_n - a \geq \theta] \cup [Z_n - a \leq -\theta].$$

b) On en déduit :  $P[|Z_n - a| \geq \theta] = P([Z_n - a \geq \theta] \cup [Z_n - a \leq -\theta])$ ,

$P[|Z_n - a| \geq \theta] = P([Z_n - a \geq \theta]) + P([Z_n - a \leq -\theta])$  car  $[Z_n - a \geq \theta]$  et  $[Z_n - a \leq -\theta]$  sont incompatibles,

$$P[|Z_n - a| \geq \theta] = P([Z_n \geq a + \theta]) + P([Z_n \leq a - \theta]).$$

Or,  $P([Z_n \leq x]) = H_n(x)$  et  $P([Z_n \geq x]) = 1 - H_n(x)$ . D'où :

$$P[|Z_n - a| \geq \theta] = 1 - H_n(a + \theta) + H_n(a - \theta).$$

c)  $0 < \theta < a \Leftrightarrow a + 0 < a + \theta < a + a$ . En particulier,  $a + \theta > a$ . On en déduit  $H_n(a + \theta) = 1$

$$0 < \theta < a \Leftrightarrow -a < -\theta < 0 \Leftrightarrow 0 < a - \theta < a. \text{ On en déduit } H_n(a - \theta) = \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n}.$$

$$\text{Finalement, } P[|Z_n - a| \geq \theta] = 1 - 1 + \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n} = \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[|Z_n - a| \geq \theta] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n}. \text{ Or } 0 < a - \theta < a \Leftrightarrow 0 < \frac{a - \theta}{a} < 1 \text{ car } a \neq 0.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P[|Z_n - a| \geq \theta] = 0.$$

## Exercice 4

1. À l'issue du premier saut :

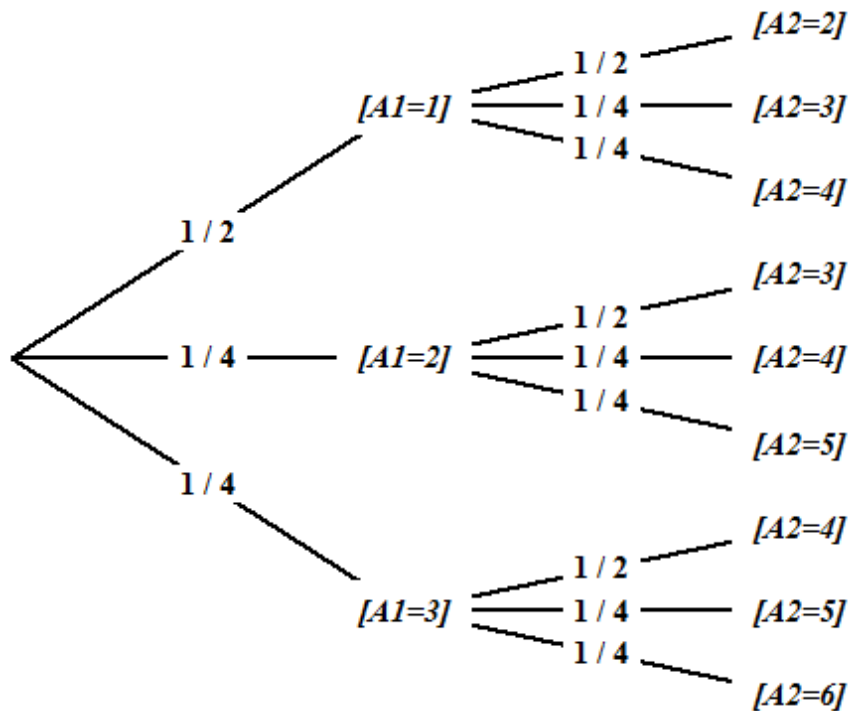
- soit la puce se trouve au point d'abscisse 1 avec la probabilité  $1/2$ .
- soit la puce se trouve au point d'abscisse 2 avec la probabilité  $1/4$ .
- soit la puce se trouve au point d'abscisse 3 avec la probabilité  $1/4$ .

$$A_1(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket \text{ et } E(A_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{2+2+3}{4} = \frac{7}{4}.$$

$$E(A_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{2+4+9}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Finalement, } V(A_1) = E(A_1^2) - (E(A_1))^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{60-49}{16} = \frac{11}{16}.$$

2. a) On peut modéliser la situation avec l'arbre suivant :



On a donc bien  $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$ .

De plus,  $[A_1 = 1]$ ,  $[A_1 = 2]$  et  $[A_1 = 3]$  constituent un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P([A_2 = 2]) = P([A_1 = 1]) \times P_{[A_1=1]}([A_2 = 2]) + P([A_1 = 2]) \times P_{[A_1=2]}([A_2 = 2]) + P([A_1 = 3]) \times P_{[A_1=3]}([A_2 = 2])$$

$$P([A_2 = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{1}{4}.$$

En procédant de la même façon, on obtient :

$$P([A_2 = 3]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P([A_2 = 4]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2+1+2}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P([A_2 = 5]) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P([A_2 = 6]) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{b) } E(A_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16} = \frac{8+12+20+10+6}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}.$$

3. a) On a  $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$  et, selon le raisonnement précédent, soit 0, soit 1 soit 2 sauts de trois unités ont été effectués. Donc  $Z_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .

D'après l'arbre précédent,

- s'il n'y a pas de saut à trois pas, on ne peut pas avoir  $[A_2 = 5]$  ou  $[A_2 = 6]$ .
- s'il y a un seul saut à trois pas, on ne peut avoir que  $[A_2 = 4]$  ou  $[A_2 = 5]$ .
- s'il y a deux sauts à trois pas, on ne peut avoir que  $[A_2 = 6]$ .

De plus, on connaît la loi de  $A_2$ . À ce stade, on a :

| $Z_2 \setminus A_2$ | 2   | 3   | 4    | 5   | 6    | Loi de $Z_2$ |
|---------------------|-----|-----|------|-----|------|--------------|
| 0                   |     |     |      | 0   | 0    |              |
| 1                   | 0   | 0   |      |     | 0    |              |
| 2                   | 0   | 0   | 0    | 0   |      |              |
| Loi de $A_2$        | 1/4 | 1/4 | 5/16 | 1/8 | 1/16 | 1            |

On en déduit aisément  $P([A_2 = 2] \cap [Z_2 = 0])$ ,  $P([A_2 = 3] \cap [Z_2 = 0])$ ,

$P([A_2 = 5] \cap [Z_2 = 1])$  et  $P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2])$  puis  $P([Z_2 = 2])$ .

Calculons enfin  $P([A_2 = 4] \cap [Z_2 = 0])$  :

$$P([A_2 = 4] \cap [Z_2 = 0]) = P([A_1 = 2] \cap [A_2 = 4]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

On en déduit les probabilités manquantes puis la loi de  $Z_2$ .

Finalement, on a :

| $Z_2 \setminus A_2$ | 2   | 3   | 4    | 5   | 6    | Loi de $Z_2$ |
|---------------------|-----|-----|------|-----|------|--------------|
| 0                   | 1/4 | 1/4 | 1/16 | 0   | 0    | 9/16         |
| 1                   | 0   | 0   | 1/4  | 1/8 | 0    | 3/8          |
| 2                   | 0   | 0   | 0    | 0   | 1/16 | 1/16         |
| Loi de $A_2$        | 1/4 | 1/4 | 5/16 | 1/8 | 1/16 | 1            |

$$\text{On a alors : } E(Z_2) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{0+6+2}{16} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } E(A_2 Z_2) = 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 5 \times \frac{1}{8} + 2 \times 6 \times \frac{1}{16} = \frac{16+10+12}{16} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}.$$

$$\text{D'où : } \text{Cov}(A_2, Z_2) = E(A_2 Z_2) - E(A_2) \times E(Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

$\text{Cov}(A_2, Z_2) \neq 0$ , donc les variables  $A_2$  et  $Z_2$  ne sont pas indépendantes.

Remarque : ce résultat était évident compte tenu, par exemple, du fait que  $P([A_2 = 2] \cap [Z_2 = 1])$ .

4.  $\text{if } t \leq 2 : A[k] = 1$   
 $\text{if } t == 3 : A[k] = 2$   
 $\text{if } t == 4 : A[k] = 3$

5. On effectue  $n$  répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve à deux issues possibles :

- la puce fait un saut d'une unité, de probabilité  $1/2$ ,
- la puce ne fait pas un saut de une unité, de probabilité  $1/2$ .

$X_n$  compte le nombre de succès.  $X_n$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

On démontre de même que  $Y_n$  et  $Z_n$  suivent toutes deux la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/4$ .

De plus,  $X_n + Y_n$  compte le nombre d'échecs de sauts de trois unités. Donc  $X_n + Y_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $3/4$ .

6. a) Le nombre total de sauts est égal à la somme des nombres de sauts d'une unité, de deux unités et de trois unités. Donc  $X_n + Y_n + Z_n = n$ .

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = \text{Cov}(Z_n, n - Z_n).$$

$$\text{Rappelons que : } 2\text{Cov}(X, Y) = V(X + Y) - V(X) - V(Y).$$

$$\text{Donc } 2\text{Cov}(Z_n, n - Z_n) = V(n) - V(Z_n) - V(n - Z_n).$$

Par ailleurs,  $V(n) = 0$  car  $n$  est donné.

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right), \text{ donc } V(Z_n) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.$$

$$\text{Enfin, } V(aX + b) = a^2 V(X) + b, \text{ donc } V(n - Z_n) = V(Z_n) = \frac{3n}{16}.$$

$$\text{Finalement, } 2\text{Cov}(Z_n, n - Z_n) = 0 - \frac{3n}{16} - \frac{3n}{16} = -\frac{3n}{8} \Leftrightarrow \text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = -\frac{3n}{16}.$$

$$\text{b) } 2\text{Cov}(X_n, Y_n) = V(X_n + Y_n) - V(X_n) - V(Y_n).$$

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right), \text{ donc } V(X_n) = \frac{n}{4}, Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right), \text{ donc } V(Y_n) = \frac{3n}{16}.$$

$$X_n + Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right), \text{ donc } V(X_n + Y_n) = \frac{3n}{16}.$$

Il vient :  $2\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{3n}{16} - \frac{3n}{16} - \frac{n}{4} \Leftrightarrow \text{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}$ .

c) 
$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{\text{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{V(X_n)}\sqrt{V(Y_n)}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}} \times \sqrt{\frac{3n}{16}}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{3n^2}{16 \times 4}}} = -\frac{n}{8} \times \sqrt{\frac{16 \times 4}{3n^2}} = -\frac{n}{8} \times \frac{4 \times 2}{n\sqrt{3}}$$

$$\rho(X_n, Y_n) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. a) L'abscisse de la puce a augmenté de 1 pour chaque saut d'une unité (donc de  $X_n$ ), de 2 pour chaque saut de deux unités (donc de  $2Y_n$ ) puis de 3 pour chaque saut de trois unités (donc de  $3Z_n$ ). Au final,  $A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n$ .

Par linéarité de l'espérance,  $E(A_n) = E(X_n) + 2E(Y_n) + 3E(Z_n)$ .

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right), \text{ donc } E(X_n) = \frac{n}{2}, Y_n \text{ et } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right), \text{ donc } E(Y_n) = E(Z_n) = \frac{n}{4}.$$

$$E(A_n) = \frac{n}{2} + 2 \times \frac{n}{4} + 3 \times \frac{n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

b)  $A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n = X_n + 2Y_n + 3(n - X_n - Y_n) = 3n - 2X_n - Y_n$ .

$$V(A_n) = V(3n - (2X_n + Y_n)) = V(2X_n + Y_n) \text{ car } V(aX + b) = a^2V(X) + b.$$

$$V(A_n) = V(2X_n) + V(Y_n) + 2\text{Cov}(2X_n, Y_n) = 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\text{Cov}(X_n, Y_n)$$

$$\text{car } V(aX) = a^2V(X) \text{ et } \text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y).$$

$$V(A_n) = 4 \times \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 4 \times \left(-\frac{n}{8}\right) = \frac{16 + 3 - 8}{16}n = \frac{11}{16}n.$$

$$2\text{Cov}(A_n, X_n) = V(A_n + X_n) - V(A_n) - V(X_n).$$

$$V(A_n + X_n) = V(3n - X_n - Y_n) = V(3n - (X_n + Y_n))$$

$$V(A_n + X_n) = V(3n - (n - Z_n)) = V(2n + Z_n) = V(Z_n).$$

$$\text{Finalement, } 2\text{Cov}(A_n, X_n) = \frac{3n}{16} - \frac{11n}{16} - \frac{n}{4} = \frac{-12n}{16} \Leftrightarrow \text{Cov}(A_n, X_n) = -\frac{3n}{8}.$$

8. On obtient le tracé de l'évolution de l'abscisse de la puce lors de 100 sauts :

- en abscisse apparaît le numéro du saut,
- en ordonnée apparaît l'abscisse où se situe la puce.

# ESC 2015 Corrigé

## Exercice 1 (modifié)

### Partie I

1. Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 \\ 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 1 & 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } 2A^2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ De plus : } A + I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a bien  $2A^2 = A + I$ .

2.  $2A^2 = A + I \Leftrightarrow 2A^2 - A - I = 0$ .  $P(X) = 2X^2 - X - 1$  est polynôme annulateur de  $A$ .

Son discriminant est :  $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 = 3^2 > 0$ .

$P$  possède donc deux racines réelles distinctes :  $x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$  et  $x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$  qui sont des valeurs propres possibles de  $A$ .

$$3. AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1X.$$

1 est bien valeur propre.  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.

$$AY = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}Y.$$

$-\frac{1}{2}$  est bien valeur propre.  $Y$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-\frac{1}{2}$ .

4. Les éléments diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres et les colonnes de  $P$  sont les vecteurs propres (ordre correspondant conservé).

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Si } ad - bc \neq 0 \text{ alors } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0. P \text{ est donc inversible et } P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad AP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 & \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-2) \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 1 \times 1 - 2 \times 0 & 1 \times 0 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc deux matrices,  $D$  (diagonale) et  $P$  (invertible) telles que :

$$AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Donc  $A$  est diagonalisable.

6. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 0, A^n = PD^nP^{-1}$  :

- $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n = PD^nP^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PD \times D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

7.  $D$  est une matrice diagonale. Donc  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}$ .

8. Calculons  $A^n$  :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \times 1 - 2 \times 0 & 1 \times 0 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \times 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 1 & 1 \times 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 1 \\ 1 \times 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 1 & 1 \times 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ car } -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = +\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$



## Partie II

1. a) D'après l'énoncé, la mouche se trouvant dans la pièce  $B$  à l'instant 1, on a :  $a_1 = 0$ ,  
 $b_1 = 1$  et  $c_1 = 0$ .

- b)  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}),$$

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0, \text{ donc } a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n. \text{ De même :}$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}),$$

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1, \text{ donc } b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n. \text{ Puis :}$$

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}),$$

$$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0, \text{ donc } c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

$$\text{On en déduit : } b_2 = a_1 + \frac{1}{2}b_1 + c_1 = \frac{1}{2}.$$

2. a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a, d'après la question précédente :

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n.$$

- b)
- ```
import numpy as np
B=np.zeros(10)
B[0]=1
B[1]=0.5
for k in range(8):
    B[k+2]= 0.5*B[k+1]+0.5*B[k]
print(B[9])
```

3. a) Pour tout entier $n \geq 1$, $AU_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times b_{n+1} + \frac{1}{2} \times b_n \\ 1 \times b_{n+1} + 0 \times b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$

- b)
- ```
import numpy as np
A=np.array([[1/2,1/2],[1,0]])
U= np.array([[0.5],[1]])
for i in range (9):
 U=A.dot(U)
print(U[1,0])
```

c) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, U_n = A^{n-1}U_1$  :

- $A^{1-1}U_1 = I_2 \times U_1 = U_1$ . La propriété est vraie au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $U_n = A^{n-1}U_1$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^{n-1}U_1 = A^n U_1.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

d) Finalement,  $U_n = A^{n-1}U_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

L'égalité des deuxièmes composantes permettent d'écrire :

$$b_n = \frac{1}{3} \left[ \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) \times \frac{1}{2} + \left( 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) \times 1 \right] = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right]$$

$$b_n = \frac{1}{3} \left[ 2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{3} \left[ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{3} \left[ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right].$$

e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$  car  $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}$ .

Le résultat affiché par PYTHON est parfaitement cohérent avec l'expression de  $b_n$ .

f) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \left[ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{12} \left[ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right].$$

On vérifie que cette écriture est vraie pour  $n = 0$  :

$$\frac{1}{12} \left[ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{0-1} \right] = \frac{1}{12} [2 - 2] = 0 = a_0 = c_0.$$

## Exercice 2

1. a) En  $+\infty$  :

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ par croissances comparées} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

En 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ car } \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x), \text{ puis :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x+1 = 1 \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

**b)**  $\bullet f(x) - (x+1) = x+1 + \frac{\ln(x)}{x} - (x+1) = \frac{\ln(x)}{x}.$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x+1$  est donc asymptote à la courbe de  $f$ .

**c)**  $\bullet f(x) - (x+1) = \frac{\ln(x)}{x}.$  Étudions le signe de  $\frac{\ln(x)}{x}.$

$x > 0$ , donc  $\frac{\ln(x)}{x}$  est du signe de  $\ln(x)$ , c'est-à-dire positif sur  $]1; +\infty[$  et négatif sur  $]0; 1]$ .

Finalement,  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur  $]1; +\infty[$  et en dessous de  $\mathcal{D}$  sur  $]0; 1]$ .

**2. a)**  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et  $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)}{x}.$

$\bullet x > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$ .

$\bullet \sqrt{2}x + 1 > 0$  car  $x \in ]0; +\infty[$ .

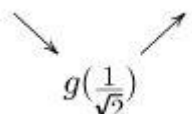
$g'(x)$  est donc du signe de  $\sqrt{2}x - 1$ .

$\bullet \sqrt{2}x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x > 1$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$

On en déduit le signe de  $g'(x)$  puis le sens de variation de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

|         |                                                                                     |                      |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------|
| $x$     | 0                                                                                   | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -                                                                                   | 0                    | +         |
| $g$     |  |                      |           |

**b)**  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \ln(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) > 0.$

On en déduit que  $g(x)$  est positif sur  $]0; +\infty[$ .

**c)**  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

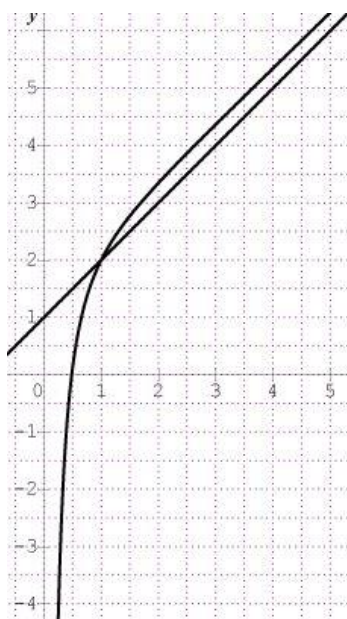
$$\left(u + \frac{v}{w}\right)' = u' + \frac{v'w - w'v}{w^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

**d)** On en déduit que  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$ , donc  $f'(x) > 0$ , et on a :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f$     | $-\infty$ | $+\infty$ |

**3.**



**4. a)** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n \geq n+1$  :

- $u_0 = 1$ , donc  $u_0 \geq 0+1$ . La propriété est vraie au rang 0.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n \geq n+1$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$u_n \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow f(u_n) \geq f(n+1) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[ ,$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq (n+1) + 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} .$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n+2 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} .$$

$$\text{Or, } \ln(n+1) \geq 0 \text{ car } n+1 \geq 1, \text{ donc } \frac{\ln(n+1)}{n+1} \geq 0 .$$

Par suite,  $u_{n+1} \geq n+2$ .

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**b)** Déterminons le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} .$$

$$\text{Or, } \ln(u_n) \geq 0 \text{ car } u_n \geq 1, \text{ donc } \frac{\ln(u_n)}{u_n} \geq 0 .$$

On en déduit :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . La suite  $(u_n)$  est croissante sur  $\mathbb{N}$ .

Par ailleurs, d'après la question précédente,  $u_n \geq n+1$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ . Par théorème de minoration,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## Exercice 3

### Partie I

1. D'après l'énoncé :

Chaque matin, Coralie se lève en retard avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . Donc  $P(R) = \frac{1}{3}$ .

Lorsqu'elle se lève en retard, elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée.

Donc  $P_R(B) = 1$ . Par contre, lorsqu'elle est à l'heure elle choisit avec trois chances sur

cinq de prendre le bus. Donc  $P_{\bar{R}}(B) = \frac{3}{5}$ .

$R$  et  $\bar{R}$  constituent un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités

totales :  $P(B) = P(R) \times P_R(B) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$ .

$$2. \text{ On demande } P_B(\bar{R}) : P_B(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B)}{P(B)} = \frac{2/3 \times 3/5}{11/15} = \frac{6/15}{11/15} = \frac{6}{11} .$$

3. a) On effectue 180 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : Coralie prend le bus, avec la probabilité  $\frac{11}{15}$ ,
- échec : Coralie ne prend pas le bus, avec la probabilité  $\frac{4}{15}$ .

La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès.

$X$  suit donc la loi binomiale de paramètres 180 et  $\frac{11}{15}$ .

$$X(\Omega) = 0 ; 180 \text{ et } \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{180}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

$$\text{b) } E(X) = 180 \times \frac{11}{15} = 180 \times \frac{11}{3 \times 5} = 60 \times \frac{11}{5} = 12 \times 11 = 132.$$

$$V(X) = 180 \times \frac{11}{15} \times \frac{4}{15} = 12 \times 11 \times \frac{4}{3 \times 5} = \frac{4 \times 11 \times 4}{5} = 35,2.$$

c) En moyenne, Coralie prend le bus 132 fois dans l'année. Elle peut donc espérer aller à pied au lycée  $180 - 132 = 48$  fois.

## Partie II

$$1. E(N) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{4+2+9}{8} = \frac{15}{8}.$$

2. Il y a potentiellement trois jours de grève au maximum donc  $Y(\Omega) = 0 ; 3$ .

3. a)  $P_{(N=1)}(Y=0)$  est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour

sachant qu'il y a un jour de grève.  $P_{(N=1)}(Y=0) = P(\bar{R}) = \frac{2}{3}$ .

$P_{(N=1)}(Y=1)$  est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour sachant qu'il

y a un jour de grève.  $P_{(N=1)}(Y=1) = P(R) = \frac{1}{3}$ .

b) On en déduit :  $P((N=1) \cap (Y=0)) = P(N=1) \times P_{(N=1)}(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ , et

$$P((N=1) \cap (Y=1)) = P(N=1) \times P_{(N=1)}(Y=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

L'événement « “Coralie arrive deux fois en retard au lycée à cause de la grève” ET “il y a un seul jour de grève” » est impossible. Donc  $P((N=1) \cap (Y=2)) = 0$ .

De même,  $P((N=1) \cap (Y=3)) = 0$ .

4. a)  $(N=0)$ ,  $(N=1)$  et  $(N=2)$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=0) = P((Y=0) \cap (N=0)) + P((Y=0) \cap (N=1)) + P((Y=0) \cap (N=2))$$

$$P(Y=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{6+1+2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On démontre de même que } P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{3+1+3}{18} = \frac{7}{18},$$

$$P(Y=2) = 0 + \frac{1}{72} + \frac{1}{12} = \frac{1+6}{72} = \frac{7}{72} \text{ et } P(Y=3) = 0 + 0 + \frac{1}{72} = \frac{1}{72}.$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{72} + 3 \times \frac{1}{72} = \frac{28+14+3}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}.$$

- b) La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est  $P(Y=0) = \frac{1}{2}$ .

- c) On a par exemple  $P(N=1) \times P(Y=2) \neq P((N=1) \cap (Y=2))$ .

Les variables  $Y$  et  $N$  ne sont pas indépendantes.

- d)  $E(YN) = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times 1 \times \frac{1}{18} + 3 \times 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times 2 \times \frac{1}{72} + 3 \times 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times 3 \times \frac{1}{72}.$

$$E(YN) = \frac{12}{72} + \frac{8}{72} + \frac{36}{72} + \frac{4}{72} + \frac{36}{12} + \frac{9}{72} = \frac{105}{72} = \frac{35 \times 3}{24 \times 3} = \frac{35}{24}.$$

On en déduit :

$$\text{cov}(Y, N) = E(YN) - E(N) \times E(Y) = \frac{35}{24} - \frac{15}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{35 \times 8 - 75 \times 3}{8 \times 8 \times 3} = \frac{280 - 225}{8 \times 8 \times 3} = \frac{55}{192}.$$

#### Exercice 4

1. a)  $\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$

- b) ★ Étude de la continuité

- Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]0; 1[$ ,  $f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)}$ , donc  $f$  y est continue.
- Sur  $]1; +\infty[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  y est continue.

Étude en 0 :

- $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = \frac{1}{\ln(2)}.$

$f$  n'est donc pas continue en 0

**Étude en 1 :**

- $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = f(1) = \frac{1}{2\ln(2)}$

- $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 0$

$f$  n'est donc pas continue en 1.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 et en 1.

**★ Étude de la positivité**

- Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .

- Sur  $[0; 1]$ ,  $f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)}$ , donc  $f(t) \geq 0$ .

- Sur  $]1; +\infty[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f(t) \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

**★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$**

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)(t+1)} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt + 0 = \frac{1}{\ln(2)} \times \ln(2) = 1 \text{ d'après la question précédente.}$$

En définitive,  $f$  est bien une densité de probabilité.

**2. a)**  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

Si  $x < 0$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$

Si  $x > 1$  : d'après la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

**b)** Si  $0 \leq x \leq 1$  : d'après la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{\ln(2)(t+1)} dt = 0 + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^x \frac{1}{t+1} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(t+1)]_0^x = \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{\ln(2)} = \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}.$$

$$\text{Finalement, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$\text{c) } P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{\ln(2)} \approx \frac{1,1-0,7}{0,7} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}.$$

$$3. \text{ a) } 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = \frac{t}{t+1}.$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[t - \ln(t+1)\right]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

$$\text{c) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_0^1 t f(t) dt + \int_1^{+\infty} t f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{t}{\ln(2)(t+1)} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt = 0 + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt + 0 = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}.$$

# Ecricome 2015 Corrigé

## EXERCICE 1

### PARTIE I : Calcul matriciel

1.  $Q \times Q = I$ . Donc  $Q$  est inversible et  $Q^{-1} = Q$ .

$$2. \quad Q \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ puis } D = (Q \times M) \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou bien } M \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ puis } D = Q \times (M \times Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$$D = QMQ \Leftrightarrow QDQ = (QQ)M(QQ) \Leftrightarrow QDQ = M.$$

3. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$ .

- $QD^0Q = QIQ = Q^2 = I$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $M^n = QD^nQ$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$M^{n+1} = M^n \times M = QD^n(Q \times Q)DQ = Q(D^n ID)Q = QD^{n+1}Q.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

$$4. \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ est diagonale.}$$

$$Q \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n & (1/4)^n \\ 0 & -(1/2)^n & -2(1/4)^n \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } M^n = (QD^n) \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^n & 1 - 2(1/2)^n + (1/4)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n - 2(1/4)^n \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{ou bien } D^n \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1/2)^n & -2(1/2)^n \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } M^n = Q \times (D^n Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^n & 1-2(1/2)^n+(1/4)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n-2(1/4)^n \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}.$$

## PARTIE II : Etude d'une expérience

1. Notons  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) l'événement « on obtient face avec la pièce 1 » (resp. pièce 2).

Notons  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) l'événement « on obtient pile avec la pièce 1 » (resp. pièce 2).

$$a_1 = P(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ par indépendance, } c_1 = P(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ puis}$$

$$b_1 = 1 - a_1 - c_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Dans ce jeu, on ne relance que les « Pile ».

Si  $A_n$  est réalisé, il n'y a pas de Pile obtenu, donc pas de Pile à relancer et on a nécessairement 0 Pile à l'étape suivante. Donc  $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ .

Si  $B_n$  est réalisé, il y a un Pile et une pièce est relancée. Il y a une chance sur deux d'obtenir Face et donc d'obtenir 0 Pile l'étape suivante. Donc  $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ .

Si  $C_n$  est réalisé, il y a deux Pile et deux pièces sont relancées. Il y a une chance sur quatre d'obtenir deux Face et donc d'obtenir 0 Pile l'étape suivante. Donc  $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ .

3.  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  constituent un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

De même,

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{1}{4} c_n.$$

$$4. (a) \forall n \geq 1, \quad M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$(b) \text{ Démontrons par récurrence que : } \forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \quad M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}. \text{ La propriété est vraie au rang 1.}$$

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

• Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

$$5. (a) \text{ D'après la question 4 de la partie I, } M^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^{n-1} & 1-2(1/2)^{n-1}+(1/4)^{n-1} \\ 0 & (1/2)^{n-1} & 2(1/2)^{n-1}-2(1/4)^{n-1} \\ 0 & 0 & (1/4)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^{n-1} & 1-2(1/2)^{n-1}+(1/4)^{n-1} \\ 0 & (1/2)^{n-1} & 2(1/2)^{n-1}-2(1/4)^{n-1} \\ 0 & 0 & (1/4)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 a_n &= (1/4) + \left(1 - (1/2)^{n-1}\right) \times (1/2) + \left(1 - 2(1/2)^{n-1} + (1/4)^{n-1}\right) \times (1/4) \\
 \Leftrightarrow a_n &= (1/4) + (1/2) - (1/2)^n + (1/4) - 2(1/4)(1/2)^{n-1} + (1/4)^n \\
 \Leftrightarrow a_n &= 1/4 + 1/2 + 1/4 - (1/2)^n - (1/2)(1/2)^{n-1} + (1/4)^n \\
 \Leftrightarrow a_n &= 1 - (1/2)^n - (1/2)^n + (1/4)^n \\
 \Leftrightarrow a_n &= 1 - 2(1/2)^n + (1/4)^n \\
 \Leftrightarrow P(A_n) &= 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 b_n &= (1/2)^{n-1} \times (1/2) + \left[2(1/2)^{n-1} - 2(1/4)^{n-1}\right] \times (1/4) \\
 \Leftrightarrow b_n &= (1/2)^n + 2(1/4)(1/2)^{n-1} - 2(1/4)^n \\
 \Leftrightarrow b_n &= (1/2)^n + (1/2)(1/2)^{n-1} - 2(1/4)^n \\
 \Leftrightarrow b_n &= (1/2)^n + (1/2)^n - 2(1/4)^n \\
 \Leftrightarrow b_n &= 2(1/2)^n - 2(1/4)^n \\
 \Leftrightarrow P(B_n) &= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow c_n &= (1/4)^{n-1} \times (1/4) \\
 \Leftrightarrow c_n &= (1/4)^n \\
 \Leftrightarrow P(C_n) &= \frac{1}{4^n}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad a_n + b_n + c_n = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n} + \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} + \frac{1}{4^n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}\right) = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}\right) = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4^n}\right) = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty.$$

## EXERCICE 2 (raccourci)

1.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \end{array} \right\} \text{par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \end{array} \right\} \text{par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

2.  $f$  est dérivable sur  $D$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $D$ .

$$\text{Formule : } \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1) \times (\ln(x)) - (1/x) \times x}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

- $(\ln(x))^2 > 0$  car un carré est toujours positif et que  $\ln(x) \neq 0$  sur  $D$ .

$f'(x)$  est donc du signe de  $\ln(x) - 1$ .

3. (a)  $\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$ .

On en déduit les variations de  $f$ :

| $x$     | 0         | 1         | $e$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | -         | - 0 +     |           |
| $f$     | 0 ↘<br>-∞ | +∞ ↘<br>e | e ↗<br>+∞ |           |

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e.$$

(b) Sur l'intervalle  $[e; +\infty[$  :

- $f$  est continue
- $f$  est strictement croissante
- $f([e; +\infty[) = [e; +\infty[$

$f$  réalise donc bien une bijection de  $[e; +\infty[$  sur  $[e; +\infty[$ .

$$4. (a) \forall x \in D, \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} = x \Leftrightarrow x = x \ln(x) \Leftrightarrow x - x \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \ln(x) = 0$$

$$(\text{impossible}) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e$$

Finalement, l'équation  $f(x) = x$  possède une seule solution :  $e$ .

$$(b) \quad f(x) - x = \frac{x}{\ln(x)} - x = \frac{x - x \ln(x)}{\ln(x)} = \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)}.$$

- $x > 0$  car  $x \in D$
- $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
- $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

On en déduit le tableau du signe de  $f(x) - x$  :

| $x$        | 0 | 1 | $e$ | $+\infty$ |
|------------|---|---|-----|-----------|
| $x$        | + | + | +   | +         |
| $\ln(x)$   | - | 0 | +   | +         |
| $1-\ln(x)$ | + | + | 0   | -         |
| $f(x)-x$   | - | + | 0   | -         |

Notons en particulier que  $\forall x \in [e; +\infty[, \quad f(x) - x \leq 0$ .

5. (a) Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$ .

- $u_0 = 3 \geq e$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n \geq e$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :

$$u_n \geq e$$

$$\Leftrightarrow \quad f(u_n) \geq f(e) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [e; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \geq e \text{ car } u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } f(e) = e$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$  d'après la question précédente. Donc  $f(u_n) - u_n \leq 0$  d'après la question 4. (b). Or :  $f(u_n) - u_n \leq 0 \Leftrightarrow f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$  car  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

(c)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $e$ , donc elle est convergente (théorème de convergence monotone) vers un réel  $l$  tel que  $l \geq e$ . De plus, ce réel vérifie  $l = f(l)$  (théorème du point fixe). Or, d'après la question 4. (a),  $f$  possède un seul point fixe :  $e$ . En définitive,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e$ .

### EXERCICE 3

#### PARTIE I : Étude de 100 appels

1. (a) On effectue 100 épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appel concerne le produit A, avec la probabilité 0,05
- échec : l'appel ne concerne pas le produit A, avec la probabilité 0,95.

La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès.

$X$  suit donc la loi binomiale de paramètres 100 et 0,05.

$$X(\Omega) = 0; 100 \text{ et } \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{100}{k} 0,05^k 0,95^{100-k}.$$

$$(b) E(X) = 100 \times 0,05 = 5 \text{ et } V(X) = 100 \times 0,05 \times 0,95 = 5 \times 0,95 = 4,75.$$

2.  $X$  est la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A, donc  $1 - X$  est la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit B.

Le bénéfice total  $Y$  de la société pour 100 appels est donc :

$$Y = 95 \times X + 5 \times (100 - X) = 95X + 500 - 5X = 90X + 500.$$

On en déduit :

$$E(Y) = E(90X + 500) = 90E(X) + 500 \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

$$\text{Donc } E(Y) = 90 \times 5 + 500 = 450 + 500 = 950.$$

$$V(Y) = V(90X + 500) = 90^2 V(X) \text{ car } V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$$\text{Donc } V(Y) = 8100 \times 4,75 = 38\,475.$$

3. Les deux espérances sont égales à 5. Or, l'espérance d'une loi de Poisson est égale à son paramètre. On en conclut que le paramètre de la loi de Poisson est 5.

$$\text{Dès lors, } P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0,968 = 0,032.$$

#### PARTIE II : Étude de la première série d'appels

1. (a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appel concerne le produit A, avec la probabilité 0,2
- échec : l'appel concerne le produit B, avec la probabilité 0,8.

La variable aléatoire  $X_A$  est le temps d'attente du premier succès.

$X_A$  suit donc la loi géométrique de paramètre 0,2.

$$X_A(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in X_A(\Omega), P(X_A = k) = 0,2(0,8)^{k-1}.$$

$$E(X_A) = \frac{1}{0,2} = \frac{1 \times 10}{0,2 \times 10} = \frac{10}{2} = 5 \text{ et } V(X_A) = \frac{1-0,2}{(0,2)^2} = \frac{0,8}{0,04} = \frac{0,8 \times 100}{0,04 \times 100} = \frac{80}{4} = 20.$$

D'après la formule de Koëning-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Leftrightarrow E(X^2) = V(X) + (E(X))^2.$$

$$\text{On en déduit : } E(X_A^2) = 20 + 5^2 = 20 + 25 = 45.$$



**(b)** On effectue des épreuves identiques et indépendantes à deux issues possibles :

- succès : l'appel concerne le produit B, avec la probabilité 0,8
- échec : l'appel concerne le produit A, avec la probabilité 0,2.

La variable aléatoire  $X_B$  est le temps d'attente du premier succès.

$X_B$  suit donc la loi géométrique de paramètre 0,8.

$$X_B(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in X_B(\Omega), P(X_B = k) = 0,8(0,2)^{k-1}.$$

$$E(X_B) = \frac{1}{0,8} = \frac{1 \times 10}{0,8 \times 10} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \text{ et } V(X_B) = \frac{1-0,8}{(0,8)^2} = \frac{0,2}{0,64} = \frac{0,2 \times 100}{0,64 \times 100} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

$$\text{Enfin : } E(X_B^2) = \frac{5}{16} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} + \frac{25}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}.$$

$$2. \text{ (a) } (L = n) \cap (X_B = n+1) = \underbrace{AA \dots AB}_{n \text{ fois}} \text{ et } (L = n) \cap (X_A = n+1) = \underbrace{BB \dots BA}_{n \text{ fois}}.$$

$$\text{(b) } P(L = n) = P\left[\left((L = n) \cap (X_B = n+1)\right) \cup \left((L = n) \cap (X_A = n+1)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P(L = n) = P\left[(L = n) \cap (X_B = n+1)\right] + P\left[(L = n) \cap (X_A = n+1)\right] \text{ par incompatibilité}$$

$$\Leftrightarrow P(L = n) = 0,2^n \times 0,8 + 0,8^n \times 0,2 \text{ par indépendance}$$

$$\text{Par ailleurs, } 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n) = 0,8 \times 0,2(0,8)^{n-1} + 0,2 \times 0,8(0,2)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n) = 0,2(0,8)^n + 0,8(0,2)^n = P(L = n).$$

3. Par définition :

$$E(L) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(L = n) = 0,8 \times \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(X_A = n) + 0,2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(X_B = n)$$

par linéarité de l'espérance

$$\Leftrightarrow E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B).$$

De même :

$$E(L^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \times P(L = n) = 0,8 \times \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \times P(X_A = n) + 0,2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \times P(X_B = n)$$

par linéarité de l'espérance

$$\Leftrightarrow E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2).$$

$$\text{Finalement, } E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B) = 0,8 \times 5 + 0,2 \times \frac{5}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4,25,$$

$$\text{puis } E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2) = 0,8 \times 45 + 0,2 \times \frac{15}{8} = 36 + \frac{3}{8} = 36,375,$$

$$\text{et enfin : } V(L) = E(L^2) - (E(L))^2 = 36,375 - 4,25^2 = 36,375 - 18,0625 = 18,3125.$$

### PARTIE III : Étude de la durée d'appel

1. Par cours, une densité  $f$  de  $D$  est :  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et sa fonction de répartition  $F$

$$\text{est : } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Calculons par intégration par parties  $\int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$ .

Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto e^{-t} - e^{-2t}$  sont continues et dérivables sur  $[0, b]$ .

$$\text{On pose : } u(t) = t \quad v'(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$u'(t) = 1 \quad v(t) = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Formule :  $\int u'v = [uv] - \int uv'$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt &= \left[ t \left( -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \right]_0^b - \int_0^b \left( -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) dt, \\ \Leftrightarrow \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt &= \left( b \left( -e^{-b} + \frac{1}{2}e^{-2b} \right) \right) - (0) - \left[ e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \right]_0^b, \\ \Leftrightarrow \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt &= -be^{-b} + \frac{1}{2}be^{-2b} - \left[ \left( e^{-b} - \frac{1}{4}e^{-2b} \right) - \left( e^{-0} - \frac{1}{4}e^{-2 \times 0} \right) \right], \\ \Leftrightarrow \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt &= -be^{-b} + \frac{1}{2}be^{-2b} - e^{-b} + \frac{1}{4}e^{-2b} + 1 - \frac{1}{4}, \\ \Leftrightarrow \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt &= -be^{-b} + \frac{1}{2}be^{-2b} - e^{-b} + \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. Sous réserves de convergence,  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$ .

Or,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} be^{-b} = 0$  par croissances comparées,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} be^{-2b} = 0$  par croissances comparées,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} = 0 \text{ et } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} = 0. \text{ Donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -be^{-b} + \frac{1}{2}be^{-2b} - e^{-b} + \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}.$$

Finalement,  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$  converge et  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt = \frac{3}{4}$ .

4. Pour que le maximum de  $D_1$  et  $D_2$  soit inférieur à  $x$ , il faut et il suffit qu'à la fois  $D_1$  et  $D_2$  soient inférieurs à  $x$  :  $(M \leq x) = (D_1 \leq x) \cap (D_2 \leq x)$ .

$$5. \quad P(M \leq x) = P[(D_1 \leq x) \cap (D_2 \leq x)]$$

$$\Leftrightarrow P(M \leq x) = P(D_1 \leq x) \times P(D_2 \leq x) \text{ par indépendance,}$$

$$\Leftrightarrow P(M \leq x) = F(x) \times F(x) = (F(x))^2 \text{ puisque } F(x) = P(D_1 \leq x) = P(D_2 \leq x).$$

Si  $x < 0$ ,  $P(M \leq x) = P(D_1 \leq x) = P(D_2 \leq x) = 0$  donc on a bien  $P(M \leq x) = (F(x))^2$ .

6. D'après la question précédente, la fonction de répartition de  $M$  est :

$$F_M(x) = (F(x))^2 = \begin{cases} (1 - e^{-x})^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $g$  de  $M$  est donc :

$$g(x) = F'_M(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \text{ (formule : } (u^2)' = 2u'u) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

7. Sous réserve de convergence :  $E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$ .

$$E(M) = \int_{-\infty}^0 x g(x) dx + \int_0^{+\infty} x g(x) dx, \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$\Leftrightarrow E(M) = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx + \int_0^{+\infty} x \times 2e^{-x}(1 - e^{-x}) dx$$

$$\Leftrightarrow E(M) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x \times 2(e^{-x} - e^{-x} \times e^{-x}) dx$$

$$\Leftrightarrow E(M) = 0 + 2 \int_0^{+\infty} x(e^{-x} - e^{-2x}) dx = 2 \int_0^{+\infty} x(e^{-x} - e^{-2x}) dx.$$

Or, d'après la question 3,  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt$  converge et vaut  $\frac{3}{4}$ .

Rappel :  $\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t}) dt = \int_0^{+\infty} x(e^{-x} - e^{-2x}) dx$  car  $t$  et  $x$  sont des variables muettes.

Finalement,  $M$  admet une espérance et  $E(M) = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ .

# ESCP 2015 Corrigé

## EXERCICE 1

1. a) Par définition :  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_1^x g(t) dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1)$

b)  $G$  étant dérivable,  $f$  est dérivable et :  $f'(x) = G'(x) = g(x)$ .

c)  $f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt = 0$ .

2. a) Pour tout réel  $t \geq 1$ ,  $e^t \geq e$  car exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Dès lors,  $\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$  car  $t > 0$ ,

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e}{t} dt \text{ par intégration pour tout } x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq [e \ln t]_1^x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq e \ln x - e \ln 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq e \ln x$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  par théorème de comparaison.

3. a) Pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $]x, 1]$ ,  $e^t \geq e^x$  car exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Dès lors,  $\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^x}{t}$  car  $t > 0$ ,

$$\Leftrightarrow \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^1 \frac{e^x}{t} dt \text{ par intégration pour tout } x \in ]0, 1]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{e^x}{t} dt \text{ car } \int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq e^x \int_1^x \frac{1}{t} dt \text{ (on intègre par rapport à } t)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq e^x [\ln t]_1^x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq e^x \ln x - e^x \ln 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq e^x \ln x.$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln x = -\infty.$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  par théorème de comparaison.

4. D'après la question 1. b),  $f'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x} \geq 0$  car une exponentielle est toujours positive et  $x > 0$ .  $f$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f$     | $-\infty$ | $+\infty$ |

5. a)  $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ .  $f'$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .

Formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f''(x) = \frac{e^x \times x - 1 \times e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

b) Déterminons le signe de  $f''(x)$ .

- $x^2 > 0$  car un carré est toujours positif et que  $x \neq 0$ ,
- $e^x > 0$  car une exponentielle est toujours positive.

Donc  $f''(x)$  est du signe de  $x-1$ .

Plus particulièrement,  $f''(x)$  change de signe en  $x=1$ .

La courbe  $(\mathcal{C})$  admet un point d'inflexion A d'abscisse 1 et d'ordonnée  $f(1) = 0$ .

- c) •  $f(1) = 0$ ,
- $f'(1) = \frac{e^1}{1} = e$ .

Une équation de la tangente  $(\mathcal{T})$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point A est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1),$$

$$\Leftrightarrow y = e(x-1) + 0$$

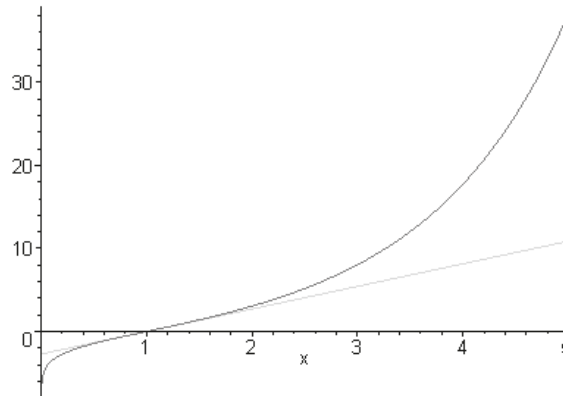
$$\Leftrightarrow y = ex - e$$

d) Servons-nous de l'étude de la convexité de  $f$ .

Sur  $]0;1]$ ,  $f''(x) \leq 0$  donc  $f$  est concave et donc  $(C)$  est au-dessous de  $(T)$ .

Sur  $[1; +\infty[$ ,  $f''(x) \geq 0$  donc  $f$  est convexe et donc  $(C)$  est au-dessus de  $(T)$ .

L'allure de la courbe est la suivante :



6. a) D'après la question 4,  $f$  réalise une bijection strictement croissante de  $]0; +\infty[$  sur  $] -\infty; +\infty[$ . En effet,  $f$  y est continue, strictement croissante et  $f(]0; +\infty[) = ] -\infty; +\infty[$ . Or  $n \in ] -\infty; +\infty[$ . Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation  $f(x) = n$  possède une solution unique  $u_n$  (elle dépend de  $n$ ).

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe un unique réel  $u_n$  vérifiant  $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$ .

b) Comparons les images  $f(u_{n+1})$  et  $f(u_n)$ .

Par construction,  $f(u_{n+1}) = n+1$  et  $f(u_n) = n$ . Donc  $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ .

Or,  $f$  est strictement croissante. On en déduit :  $u_{n+1} \geq u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc croissante.

c) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc soit convergente, soit tend vers l'infini.

Supposons que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers un réel  $l$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l) \text{ car } f \text{ est continue sur } ]0; +\infty[.$$

$$\Leftrightarrow f(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \text{ car } f(u_n) = n$$

$$\Leftrightarrow f(l) = +\infty \text{ ce qui est absurde puisqu'on a supposé } l \text{ est un réel fixé.}$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## EXERCICE 2

1. a) Dans cette question,  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .  $1 \times (-1) - 1 \times (-1) = 0$ . Donc  $M$  n'est pas inversible.

b)  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $M^n = M^{n-2} \times M^2 = M^{n-2} \times O = O$ .

2. a) Dans cette question,  $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ .  $1 \times a - 1 \times a = 0$ . Donc  $M$  n'est pas inversible.

b) Démontrons par récurrence que : pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $M^n = (1+a)^{n-1} M$ .

$$\bullet \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a(1+a) \\ 1+a & a(1+a) \end{pmatrix} = (1+a) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = (1+a)^{2-1} M.$$

La propriété est vraie au rang 2.

• Soit  $n \geq 2$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que

$$M^n = (1+a)^{n-1} M, \text{ montrons qu'elle est vraie au rang } n+1 :$$

$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1} (1+a) M = (1+a)^n M$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

• Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier  $n \geq 2$ .

3.  $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ .  $1 \times b - 1 \times a = b - a$ .  $M$  est inversible si, et seulement si,  $b - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$ .

4. Notons que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

$$[X = Y] = ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 2]) \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k]).$$

Dès lors :

$$P([X = Y]) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k])\right)$$

$$\Leftrightarrow P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]) \text{ par incompatibilité}$$

$$\Leftrightarrow P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k]) \text{ par indépendance}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 q^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = p^2 q^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k.$$

$$\text{On rappelle que } \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \text{ si } |a| < 1 \text{ et que } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - u_0.$$

$$\text{Dès lors, } \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 q^{-2} \left( \frac{1}{1-q^2} - (q^2)^0 \right) = p^2 q^{-2} \left( \frac{1}{1-q^2} - 1 \right) = p^2 q^{-2} \left( \frac{1 - (1-q^2)}{1-q^2} \right),$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 q^{-2} \times \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q} \text{ car } p = 1-q.$$

c)  $A$  est réalisé si, et seulement si,  $X \neq Y$ . On en déduit :  $P(A) = 1 - P([X = Y])$ .

De plus, d'après les questions précédentes :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k]). \text{ Or } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi géométrique}$$

de paramètre  $p$ . Donc  $P([X = k]) = P([Y = k]) = p \times q^{k-1}$ .

$$\text{D'où : } P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p \times q^{k-1} \times p \times q^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 \times q^{2k-2} = \frac{p}{1+q} = \frac{1-q}{1+q}.$$

$$\text{Finalement, } P(A) = 1 - \frac{1-q}{1+q} = \frac{1+q-1+q}{1+q} = \frac{2q}{1+q}.$$

5. a) D'après la formule du binôme :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{1} x + \binom{n}{0}$$

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \binom{2n}{2n} x^{2n} + \binom{2n}{2n-1} x^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{1} x + \binom{2n}{0}$$

b)  $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$ .

Identifions les coefficients de  $x^n$  dans chacun des deux membres.

Dans le membre de gauche, il est égal à  $\binom{2n}{n}$  (on a remplacé  $k$  par  $n$ ).

Dans le membre de droite, il est obtenu par les produits de  $x^n$  et 1, de  $x^{n-1}$  et  $x$ , de  $x^{n-2}$  et  $x^2$ , ..., de  $x^2$  et  $x^{n-2}$ , de  $x$  et  $x^{n-1}$  et enfin de 1 et  $x^n$ .

Il est donc égal à :

$$\binom{n}{n} \times \binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} \times \binom{n}{1} + \binom{n}{n-2} \times \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2} \times \binom{n}{n-2} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1} + \binom{n}{0} \times \binom{n}{n}.$$

$$\text{Finalement, } \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

$$\text{Remarquons que } \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} \text{ car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

c) Ici,  $X(\Omega) = Y(\Omega) = 0, n$ .

$$\text{On a donc la relation } P([X = Y]) = \sum_{k=0}^n P([X = k]) \times P([Y = k]).$$

$$\text{Or, } P([X = k]) = P([Y = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Il vient : } P([X = Y]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n \times 2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

d) Finalement,  $P(A) = 1 - P([X = Y]) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$



### EXERCICE 3

1. Par cours,  $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 1$  et  $V(T) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$ .

2. a) ★ Étude de la continuité de  $f$  :

Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0$ , donc  $f$  est continue sur  $]-\infty ; 0[$ .

Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = t e^{-t}$ , donc  $f$  est continue sur  $]0 ; +\infty[$ .

Donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0.

$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 e^{-0} = 0$ . Donc  $f$  est continue en 0.

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

★ Étude de la positivité de  $f$  :

Sur  $]-\infty ; 0[$ ,  $f(t) = 0 \geq 0$ , donc  $f$  est positive sur  $]-\infty ; 0[$ .

Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(t) = t e^{-t} \geq 0$  car  $t \geq 0$  et  $e^{-t} \geq 0$ , donc  $f$  est positive sur  $]0 ; +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

★ Calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  sous réserves de convergence :

On reconnaît la formule de  $E(T)$  évoqué en question 1.

En effet,  $E(T) = \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ .

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .

On en déduit que  $f$  est bien une densité de probabilité.

b) Par définition, et sous réserves de convergence :

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ . On reconnaît la formule de  $E(T^2)$ .

En effet,  $E(T^2) = \int_{-\infty}^0 t^2 \times 0 dt + \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^{+\infty} t \times t e^{-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ .

De plus,  $E(T^2) = V(T) + (E(T))^2$  d'après la formule de Koëning.

Finalement,  $E(T^2) = 1 + 1^2 = 2$ .  $X$  admet une espérance et  $E(X) = 2$ .

3. Par définition,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

Si  $x < 0$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ .

Si  $x \geq 0$ , d'après la relation de Chasles,  $F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x t e^{-t} dt$ .

Il est possible d'intégrer par parties pour retrouver le résultat de l'énoncé, mais comme

$F(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$ , il suffit de prouver que  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.

•  $F(0) = 1 - (0+1)e^{-0} = 1 - 1 = 0$

- $(uv)' = u'v + v'u$  donc  $F'(x) = -\left[1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(x+1)\right] = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$ .

$F$  est donc bien la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

4. a) On a, pour tout réel  $x$  :  $Z > x \Leftrightarrow \min(X_1, X_2) > x \Leftrightarrow (X_1 > x \text{ et } X_2 > x)$ .

$X_1$  et  $X_2$  étant indépendantes, on a donc :

$$P([Z > x]) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x]).$$

- b) Par définition :

$$H(x) = P([Z \leq x]) = 1 - P([Z > x]) = 1 - P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$$

$$\text{Or, } P([X_1 > x]) = P([X_2 > x]) = P([X > x]) = 1 - P([X \leq x]) = 1 - F(x).$$

$$\text{Finalement, } H(x) = 1 - (1 - F(x))^2, \text{ c'est-à-dire : } H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- c) Une densité  $h$  de  $Z$  s'obtient en dérivant  $H$  :

$$\text{Si } x < 0, H'(x) = 0.$$

$$\text{Si } x \geq 0, H'(x) = \left(1 - (x+1)^2 e^{-2x}\right)' = -\left[\left((x+1)^2\right)' e^{-2x} + (e^{-2x})' (x+1)^2\right],$$

$$H'(x) = -\left[2(x+1)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1)^2\right] = -2(x+1)e^{-2x}[1 - x - 1],$$

$$\text{donc } h(x) = H'(x) = 2x(x+1)e^{-2x}.$$

5. a)  $(uv)' = u'v + v'u$  donc, pour tout réel  $x$  :

$$g'(x) = -\left[\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)' e^{-2x} + (e^{-2x})' \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\right],$$

$$g'(x) = -\left[\left(3x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - 2e^{-2x}\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\right],$$

$$g'(x) = -e^{-2x}\left[3x^2 + 5x + \frac{5}{2} - 2x^3 - 5x^2 - 5x - \frac{5}{2}\right] = -e^{-2x}[-2x^3 - 2x^2],$$

$$g'(x) = 2x^2 e^{-2x} (x+1).$$

- b) Par définition, si  $E(Z)$  existe,  $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt$ .

$$\text{D'après la relation de Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt = \int_{-\infty}^0 t h(t) dt + \int_0^{+\infty} t h(t) dt.$$

- $\int_{-\infty}^0 t h(t) dt = 0$  car  $h(t) = 0$  si  $t < 0$ .

- Sous réserves de convergence,  $\int_0^{+\infty} t h(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t h(t) dt$ .

$$\int_0^A t h(t) dt = \int_0^A 2t^2 (t+1) e^{-2t} dt = \int_0^A g'(t) dt = g(A) - g(0),$$

$$\int_0^A t h(t) dt = -\left(A^3 + \frac{5}{2}A^2 + \frac{5}{2}A + \frac{5}{4}\right)e^{-2A} + \frac{5}{4},$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-2A} = 0 \text{ et, par croissances comparées, } \lim_{A \rightarrow +\infty} A^n e^{-2A} = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

$$\text{On a donc } \int_0^{+\infty} t h(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t h(t) dt = \frac{5}{4}.$$

$$\text{On a donc finalement, } E(Z) = 0 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}.$$

**6. a)** Parmi chacune des valeurs des deux variables  $X_1$  et  $X_2$ , l'une est le maximum et l'autre le minimum. On en déduit :  $Z + W = X_1 + X_2$ .

**b)** On en déduit  $W = X_1 + X_2 - Z$  puis, par linéarité de l'espérance :

$$E(W) = E(X_1 + X_2 - Z) = E(X_1) + E(X_2) - E(Z) = 2 + 2 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

**c)** Si  $X_1 \geq X_2$  alors  $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2 = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) = W - Z$ .

Si  $X_2 \geq X_1$  alors  $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1 = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) = W - Z$ .

En définitive,  $|X_1 - X_2| = W - Z$ .

**d)** On en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$E(|X_1 - X_2|) = E(W - Z) = E(W) - E(Z) = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

#### EXERCICE 4

$$1. \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ De plus, } u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2 \times 1 - \frac{5}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 = 2.$$

$$\text{Donc } X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \mathbf{a)} \quad AX_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

b) Démontrons par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$  :

- $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $X_n = A^n X_0$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :  

$$X_{n+1} = A X_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$
La propriété est vraie au rang  $n+1$ .
- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

3. a)  $PQ = 4I$ . Donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$ .

$$\text{b) } P \times T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \times P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a donc :  $AP = PT \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$ .

Démontrons par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^n = PT^n P^{-1}$  :

- $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ . La propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n = PT^n P^{-1}$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$  :  

$$A^{n+1} = A^n \times A = PT^n (P^{-1} \times P) TP^{-1} = P(T^n I T) P^{-1} = PT^{n+1} P^{-1}.$$
La propriété est vraie au rang  $n+1$ .
- Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

4. Soit  $D$  la matrice définie par :  $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose :  $N = T - D$ .

$$\text{a) } N = T - D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$N^2 = O$ . Dès lors, pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $N^k = N^2 \times N^{k-2} = O \times N^{k-2} = O$ .

b)  $DN = ND = \frac{1}{2}N$ .

$$N = T - D \Leftrightarrow T = D + N, \text{ donc } T^n = (D + N)^n.$$

Comme  $D$  et  $N$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme. Dès lors :

$$\text{Finalement : } T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

$$\Leftrightarrow T^n = \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 + O \text{ car pour tout entier } k \geq 2, N^k = O,$$

$$\Leftrightarrow T^n = D^n + nD^{n-1}N$$

$$\text{De plus, pour tout } k \in [0, n] \quad D^k = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ est diagonale.}$$

$$\text{On a donc } D^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et enfin :}$$

$$nD^{n-1}N = n \times \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{n}{2^{n-1}} N = \frac{2n}{2^n} N.$$

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$T^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^n = PT^nP^{-1}$  avec  $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$ .

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix},$$

$$A^n = (PT^n)P^{-1} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow A^n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 16 \times 2^n - 4n - 12 & -16 \times 2^n + 6n + 16 & 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 16 \times 2^n - 8n - 16 & -16 \times 2^n + 12n + 20 & 4 \times 2^n - 4n - 4 \\ 16 \times 2^n - 16n - 16 & -16 \times 2^n + 24n + 16 & 4 \times 2^n - 8n \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & -4 \times 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & -4 \times 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & -4 \times 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ a) } X_n = A^n X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}.$$

Par identification,  $u_n = \frac{1}{2^n} (4 \times 2^n - 4n - 4)$ .

$$b) u_n = \frac{1}{2^n} (4 \times 2^n - 4n - 4) = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{2^n} = 0$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{2^n} = 0$  par croissances comparées.

(Rappel :  $2^n = e^{n \ln 2}$  est une suite exponentielle).

En définitive,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .









Ce recueil est dédié à l'attention exclusive de mes étudiants chéris.  
Qu'ils en fassent bon usage !

Le possible est déjà fait ; l'impossible est en cours ; pour les miracles, prévoir un  
délai !

Proverbe français.

Dans la même collection :

- Les fiches indispensables
- Les exercices progressifs (4 tomes)
- Les exercices-types (2 tomes)
- Les exercices incontournables : énoncés
- Les exercices incontournables : corrections
- Les questions défis : énoncés
- Les bases du calcul
- Le cours complet de 3<sup>e</sup> année (18 tomes)
- Les résumés en vidéo de 3<sup>e</sup> année
- Le cours complet de 1<sup>re</sup> année (22 tomes)
- Les résumés en vidéo de 1<sup>e</sup> année
- Les TP PYTHON
- WIMS : entraînements en ligne