

Théorème de la bijection

Exercice 1

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x + x$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Étudier les branches infinies.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Montrer que l'équation $\ln x + x = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On note α ce réel.
4. Montrer que α est compris au sens large entre $1/e$ et 1.

Exercice 3

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note C_f la courbe représentative de f .

1.
 - a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
 - b) Donner les valeurs suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
2.
 - a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
 - b) Construire le tableau de variation de f .
 - c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x .
 - d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question l'équation (E_n) d'inconnue x : $f(x) = n$.
Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n .
(on ne cherchera pas ici à calculer u_n)
Préciser la valeur de u_0 .