

Densité de probabilité

Densité de probabilité $\rightarrow$ fonction de répartition $\rightarrow$ probabilités

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $]-\infty ; +\infty[$:

1. Démontrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de la fonction f .
3. Soit X la variable aléatoire dont f est une densité.

Calculer $P(X \leq 1)$, $P(X > 3)$, $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 2\right)$, $P_{(X \geq 1)}(X < 3)$.

4. Calculer $E(X)$.

Bonus : calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 4-8x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Densité de probabilité $\rightarrow$ probabilités

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire dont f est une densité.

Calculer $P(-2 \leq X \leq 1/4)$.

Fonction de répartition $\rightarrow$ densité de probabilité

Exercice 3

Pour chacune des fonctions F suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

1. Montrer que la fonction F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité.
2. Calculer la fonction densité associée.

a)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$