

Vecteurs propres Valeurs propres Exercices
--

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on donne une relation matricielle vérifiée par une matrice A .

1. Donner un polynôme annulateur associé.
 2. Déterminer les valeurs propres possibles de A .
-
- a) $(A - 2I)(A - 3I)(A - 4I) = O$.
 - b) $A^3 + A^2 - 3A = O$.
 - c) $A^3 = 9A$.
 - d) $A^3 + A^2 - 10A + 8I = O$ (on montrera que 1 est racine évidente puis on factorisera).

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A .
3. On considère les matrices colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que X et Y sont vecteurs propres de A . Quelles sont les valeurs propres associées ?

4. Comment les matrices D et P ont-elles été obtenues ? Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
5. Vérifier que $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
6. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Donner D^n pour tout entier naturel n .
8. Calculer A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 3 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(A - I)(4A - 3I)$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A .
3. Vérifier que les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice A et donner les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 associées.
4. Vérifier que $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
6. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n P = P D^n$.
7. Donner D^n pour tout entier naturel n .
8. Calculer A^n pour tout entier naturel n .