

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les questions défis

Julien Fernandez

Fonctions et Intégration

Question(s) n°1

Soit (E) l'équation d'inconnue x :

$$(m-1)x^2 - 4mx + m - 6 = 0, \text{ où } m \text{ est un réel différent de } 1.$$

Déterminer m afin que (E) ne possède qu'une seule racine réelle.

Résoudre alors (E) .

Question(s) n°2 *Oral HEC ECE 2007*

Dans tout cet exercice, on considère deux nombre réels S et x tels que : $S > 0$ et $x > 0$.

1. La somme S est placée deux années consécutives au taux d'intérêt x .
Le taux x désigne un nombre tel que $0 < x < 1$. Ainsi, si le taux est de 4%, on a $x = 0,04$.
De quelle somme S_1 dispose-t-on à l'issue des deux années de placements ?
2. La somme S est placée la première année au taux $2x$ et la seconde au taux y .
De quelle somme S_2 dispose-t-on à l'issue de deux années de placement ?
3. Montrer que l'égalité de ces deux placements c'est-à-dire l'égalité $S_1 = S_2$ équivaut à une égalité de la forme $y = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, que l'on explicitera.
4. Donner le tableau de variations de f et l'allure de la courbe représentative.

Question(s) n°3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^x}{2 + e^x}$.
Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.
Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Question(s) n°4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + 2x - 7$.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
2. Existe-t-il une tangente à la courbe représentative de f parallèle à la droite d'équation $y = x$?

Question(s) n°5

On considère la fonction f définie pour tout x réel différent de 0,5 par $f(x) = \frac{1-x}{2x-1}$.

1. Questions préliminaires :

- a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{R}$, le discriminant du polynôme $P(x) = -2kx^2 + (k-1)x + 1$ est égal à $\Delta = k^2 + 6k + 1$.
- b) Déterminer, pour $k \in \mathbb{R}$, le signe de $\Delta = k^2 + 6k + 1$ (on notera k_1 et k_2 les valeurs de k qui annulent Δ).

2. Un exemple :

- a) Donner une équation de la droite (d_1) qui passe par l'origine du repère et qui a pour coefficient directeur 1.
- b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f représentative de la fonction f , et de la droite (d_1) .

3. Deuxième exemple :

Pour $k \in \mathbb{R}$ on appelle (d_k) la droite qui passe par l'origine du repère et qui a pour coefficient directeur k . On cherche à déterminer, si elles existent, les valeurs de k pour lesquelles C_f et (d_k) n'ont qu'un seul point d'intersection.

- a) Justifier que (d_k) a pour équation $y = kx$.
- b) Montrer que les abscisses des points d'intersection de C_f et de (d_k) sont les racines du polynôme P défini à la question 1.a).
- c) En déduire alors que seules les droites (d_{k_1}) et (d_{k_2}) n'ont qu'un seul point d'intersection avec la courbe C_f .

Question(s) n°6

Oral HEC ECS 2009

- 1. *Question de cours* : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, alors

$$f\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z)$$

- 2. Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que : $(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

En déduire que : $(abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$.

Question(s) n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Construire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
5. a) Montrer que $f(x) - x = \frac{-x^3}{1+x^2}$.
b) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Question(s) n°8

Calculer le réel : $A = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Question(s) n°9 *Oral HEC ECE 2010*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x \ln^2(x).$$

Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

Question(s) n°10 *Oral HEC ECS 2009*

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x)}{12x^2}.$$

Étudier les variations de f .

Question(s) n°11

Oral HEC ECT 2011

1. *Question de cours* : Principes du raisonnement par récurrence.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x)e^x$, où e désigne la base du logarithme népérien.

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

3. a) Résoudre l'équation : $x^2 + 3x + 1 = 0$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f ; étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .

b) Dresser le tableau de variation de f .

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

5. Étudier graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$, où λ est un réel donné quelconque.

6. Pour tout x réel et pour tout entier naturel n , trouver l'expression de $f^{(n)}(x)$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Question(s) n°12

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln x$

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

3. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{4x+3}$

5. $f(x) = 3xe^{x^2}$

6. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$

7. $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

8. $f(x) = (x+4)e^x$

9. $f(x) = x \ln x$

Question(s) n°13

Oral HEC ECE 2012

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$.

2. Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

3. En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p .

Question(s) n°14

Oral HEC ECT 2011

1. Question de cours : Limite d'une fonction composée.

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-3/2, -1/2\}$ par : $f(x) = \frac{2}{(2x+1)(2x+3)}$.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

4. a) Déterminer la valeur des deux constantes réelles a et b telles que pour tout x de D , on

$$\text{ait : } f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x+3}.$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^t f(x)dx$, dans laquelle t désigne un nombre réel strictement positif.

c) On pose pour tout réel t strictement positif : $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

Suites

Question(s) n°15

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \frac{n^2 + 1}{n - 1}$.

Déterminer de deux façons différentes les variations de la suite (u_n) .

Question(s) n°16

1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de (u_n) ?

2. Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n^2 + k}$.

Montrer que pour tout entier n non nul : $\frac{n}{n^2 + n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$.

Quel est la limite de la suite (v_n) ? Quelle est la limite de la suite (nv_n) ?

Question(s) n°17

Soit u la suite de terme général u_n défini par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Montrer que $u_1 + u_2 + u_3 = -\ln 4$.

2. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Exprimer S_n en fonction de n .

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Question(s) n°18

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

2. Faire une conjecture sur la valeur de u_n , puis démontrer-la par récurrence.

Question(s) n°19

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

1. Calculer w_1 , w_2 , w_3 et w_4 .
2. Quel semble être la nature de la suite (w_n) ? Conjecturer une formule explicite pour w_n .
La démontrer par récurrence.

Question(s) n°20

1. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Question(s) n°21

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
2. Écrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n .

Question(s) n°22

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$; $u_n \geq 0$.
b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
- Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
4. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- Écrire en Scilab un algorithme permettant de calculer S_n .
 - Déterminer, par le calcul, l'expression de S_n en fonction de n .

Question(s) n°23*Oral HEC ECT 2009*

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

- Question de cours : Suites géométriques, convergence, somme.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
 - En déduire la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles a et b que l'on déterminera ($a > b$).
- Montrer que $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$.
Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.
 - Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.
 - Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{a^n}$.

Question(s) n°24*Oral HEC ECE 2012*

- Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.
 - Calculer les dérivées première et seconde f'_n et f''_n de la fonction f_n .
 - Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.
 - Justifier l'existence d'un réel $a \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.

2. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.
- a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1; +\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n , sur $]1; +\infty[$ (u_n désigne la plus petite de ces deux racines).
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente et conjecturer sa limite.

Question(s) n°25

Oral HEC ECT 2010

1. Question de cours : Énoncer le théorème d'encadrement («des gendarmes») sur les suites.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.
- a) Montrer que $u_1 = \ln 2$.
- b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- c) Établir la relation : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.
- d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
- e) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement : $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. a) Montrer que pour tout réel positif u , on a : $\ln(1+u) \leq u$.
- b) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$.
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

Question(s) n°26

Oral HEC ECT 2010

1. *Question de cours* : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. On pose $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
 - a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité et la convexité de f .
 - b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
3. a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \frac{1}{n}$.
 - b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.
 - c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
4. a) Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1+u \leq e^u \leq 1+2u$.

Matrices

Question(s) n°27

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$. Calculer alors M^n .

Question(s) n°28

Oral HEC ECT 2010

Déterminer en fonction de a , toutes les matrices carrées M d'ordre 2 avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, qui vérifient les deux propriétés : $M^2 = M$ et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Question(s) n°29

Oral HEC ECE 2008

On note E l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

où a, b, c sont des nombres réels. On définit la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer K^2 , K^3 . En déduire que K est inversible et déterminer son inverse K^{-1} .
2. Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I (matrice identité d'ordre 3), K et K^2 . En déduire que, pour tout (a, b, c, a', b', c') de $\mathbb{R}^6$:

$$M(a, b, c) \times M(a', b', c') = M(a', b', c') \times M(a, b, c)$$

Question(s) n°30

Oral HEC ECT 2009

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2 , puis J^n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
2. Calculer A^{2009} .

Question(s) n°31

Oral HEC ECE 2008

1. *Question de Cours*: Qu'appelle-t-on système de Cramer ?

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **a)** Calculer A^2 , puis déterminer a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
- b)** En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I , puis calculer A^{-1} .
- c)** Utiliser le calcul de A^{-1} pour résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z = 2 \\ 3x - 7y + 9z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$A^n = (-1)^n \left[(1 - 2^n)A + (2 - 2^n)I \right].$$

Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?**Question(s) n°32**

Oral HEC ECE 2008

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Trouver une relation entre A^2 , A et I (matrice identité d'ordre 3).
- b)** En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer les valeurs propres possibles de A . Ces valeurs sont-elles des valeurs propres ?

Question(s) n°33

Oral HEC ECE 2008

Pour tout nombre réel $a \neq 1$, on note $A(a)$ la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que a est valeur propre de $A(a)$ et déterminer le vecteur propre associé.

b) Calculer $A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Conclure.

2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

a) On pose pour tout n entier naturel, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Quelle relation a-t-on entre X_{n+1} et

X_n ? Entre X_n et X_0 ?

b) En utilisant la question **1**, calculer x_n .

Probabilités

Question(s) n°34*Oral HEC ECE 2008*

Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p ($0 < p < 1$) d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial. Montrer que :

$$p_n = p + (1 - 2p) p_{n-1}.$$

En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Question(s) n°35*Oral HEC ECT 2011*

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et N boules bleues.

On effectue dans cette urne un tirage simultané de 2 boules et on suppose que tous les tirages possibles sont équiprobables.

1. Exprimer en fonction de N , la probabilité p d'obtenir un tirage unicolore.
- 2 Trouver la valeur de N pour laquelle la probabilité d'obtenir 2 boules bleues est égale à $\frac{1}{6}$.

Quelle est dans ce cas la valeur de p ?

Question(s) n°36*Oral HEC ECE 2007*

Dans l'urne U_1 , la probabilité de tirer une boule rouge est égale à p , et dans l'urne U_2 , elle est de $\frac{p}{3}$. On tire au sort, avec équiprobabilité, l'une des deux urnes U_1 et U_2 , et on choisit au hasard une boule dans cette urne.

Quelle est la probabilité pour que la boule rouge tirée provienne de l'urne U_1 ?

Question(s) n°37

Oral HEC ECE 2007

Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2 . On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$.

1. Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n -ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité, notée r_n , d'obtenir pile au n -ième lancer ?
3. Calculer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.
4. Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$. Écrire en langage Scilab un programme permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel : $|r_n - L| \leq 10^{-6}$.

Question(s) n°38

Oral HEC ECE 2008

1. *Question de Cours* : Énoncer la formule des probabilités totales.

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver que le système soit mis en défaut. En effet :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur et sans incident = $1/50$;
- la probabilité qu'il y ait un incident sans que l'alarme se déclenche = $1/500$;
- la probabilité qu'il se produise un incident = $1/100$.

On note A : « l'alarme se déclenche » et I : « un incident se produit ».

2. **a)** Calculer la probabilité que lors d'une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche. En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
b) Quelle est la probabilité que sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
c) L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?
3. Les assureurs estiment qu'en moyenne, le coût des anomalies est le suivant :
 - 5 000 euros pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;
 - 15 000 euros pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;
 - 1 000 euros lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.

Soit X la variable aléatoire représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

- a)** Donner la loi de probabilité de X .
- b)** Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

Question(s) n°39

Oral HEC ECE 2012

Ces questions sont en lien avec les **question(s) 13**, mais ce lien est hors programme ECT...

On dispose de N urnes ($N \geq 1$) notées $U_1, U_2, \dots, U_N$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches.

On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.

On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k .
2. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n l'événement : « au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches ». Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme.

Question(s) n°40

Oral HEC ECT 2011

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules bleues. On effectue 5 tirages successifs de 2 boules prises simultanément dans l'urne, avec remise (après chaque tirage de 2 boules, on replace les boules obtenues dans l'urne).

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages unicolores obtenus à l'issue de cette suite de 5 tirages.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Question(s) n°41

Oral HEC ECT 2010

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$.

1. Rappeler les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$. En déduire $E(X^2)$.

2. a) À l'aide de la question 1, calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k}$.

- b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les inégalités : $\sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k} \leq 2$ et $\sum_{k=1}^N \frac{k^2}{2^k} \leq 6$.

Question(s) n°42

Oral HEC ECE 2009

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
2. Déterminer la loi de U .
3. Déterminer la loi de T .
4. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Question(s) n°43

Oral HEC ECE 2012

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. Calculer pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
2. Montrer que $0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leq \frac{1}{4}$.

Question(s) n°44

Oral HEC ECE 2010

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0,1[$ tels que $p + q = 1$.

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y dont la loi du couple (X, Y) est donnée par : pour tout (j, k) tels que $0 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n$,

$$P([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j, j \neq 0 \\ \frac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Loïs marginales, loïs conditionnelles.
2. a) Déterminer les loïs marginales de X et Y respectivement.
b) Calculer $E(Y)$.

Question(s) n°45

Oral HEC ECE 2012

1. *Question de cours* : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé et soit p un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$.

On suppose que :

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
 - $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p .
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
 3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .
 4. Déterminer la loi de $X - Y$.
 5. a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y .

Question(s) n°46

Oral HEC ECT 2009

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $[-1, 3/2]$.

1. Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X .
2. On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ?
Déterminer la fonction de répartition de Y . Calculer $E(Y)$.

Question(s) n°47

Oral HEC ECT 2009

Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} a x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où a est un réel donné.

1. *Question de cours* : Rappeler les définitions et les principales propriétés d'une densité et d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Montrer que pour $a = 3/2$, on peut considérer f comme une densité d'une variable aléatoire réelle X .
3. a) Déterminer la fonction de répartition F de cette variable aléatoire X .
b) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthogonal du plan.
c) Résoudre successivement les trois équations : $F(x) = 1/4$, $F(x) = 1/2$, $F(x) = 3/4$.
4. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

Question(s) n°48

Oral HEC ECT 2010

1. Définition et propriétés de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X à densité.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

- a) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
 - b) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit X une variable aléatoire de densité f .
3. a) Étudier les variations de f . Représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .
c) Montrer que l'équation $F(x) = 1/2$ admet une unique solution que l'on déterminera.
 4. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

Question(s) n°49

Oral HEC ECE 2010

1. Montrer qu'il existe deux réels A et B , indépendants de x , tels que, pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$.
2. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

- a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X .
Donner l'expression de la fonction de répartition de X .
- b) X admet-elle une espérance ?

Question(s) n°50

Oral HEC ECE 2007

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X , exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{c}{t^2} & \text{si } t \geq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Rappeler les qualités d'une densité de probabilité ; en déduire la valeur du réel c .
2. Déterminer les réels m pour lesquels $P(X \leq m) = P(X \geq m)$.
3. Quelle est la probabilité que, sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ?

Deux machines A , B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément,

- A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux ;
- B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner.

On note T_A et T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4. Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B .
5. Pour chacune des variables T_A , T_B indiquer si elle possède une espérance, et le cas échéant, la calculer.

Question(s) n°51

Oral HEC ECE 2007

U désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. **a)** Donner une densité de U .
b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire U .
c) Exprimer, en fonction du réel x , la probabilité $P(U \geq x)$.
2. Une banque possède deux guichets. On estime que le temps de passage d'un client à un guichet suit la même loi que la variable aléatoire U .

Trois clients A , B et C arrivent en même temps. A et B , pressés, s'adressent chacun à un guichet tandis que C , attend que A ou B libère un guichet.

On désigne par :

U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux clients A et B , et V le temps d'attente du client C . On supposera que les variables U_1 et U_2 sont indépendantes.

- a)** Justifier que : pour tout x réels, $[V > x] = [U_1 > x] \cap [U_2 > x]$.
- b)** En déduire, pour tout x réel, $P[V > x]$ en fonction de $P[U > x]$.
- c)** Établir que la variable V admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- d)** En déduire une densité de probabilité g de la variable V .
- e)** Montrer que V admet une espérance et une variance qu'on calculera.

Question(s) n°52

Oral HEC ECE 2008

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.
2. Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F . Généraliser à n variables.

Question(s) n°53

Oral HEC ECE 2008

Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2a]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui ont toutes la même loi que X . On pose : $M_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$.
Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.
2. En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.
Est-il préférable à l'estimateur $V_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$?

Question(s) n°54

Oral HEC ECE 2007

Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n ($n \geq 2$) variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad T = \text{Max}(X_1, \dots, X_n).$$

1. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
2. Calculer $P([T \leq t])$. En déduire une densité de T puis $E(T)$ et $V(T)$.
3. On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.
 - a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ . Calculer $V(S')$ et $V(T')$.
 - b) Entre les deux estimateurs de θ , S' et T' , lequel doit-on préférer ?