

E.C.P. Lycée Jean PERRIN

Les questions défis

Correction

Julien Fernandez

Question(s) n°1

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m-1)(m-6) = 12m^2 + 28m - 24.$$

$$(E) \text{ a une seule racine réelle } \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 12m^2 + 28m - 24 = 0,$$

$$(E) \text{ a une seule racine réelle } \Leftrightarrow 4(3m^2 + 7m - 6) = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ ou } m = \frac{2}{3} \text{ (on a } \Delta' = 121).$$

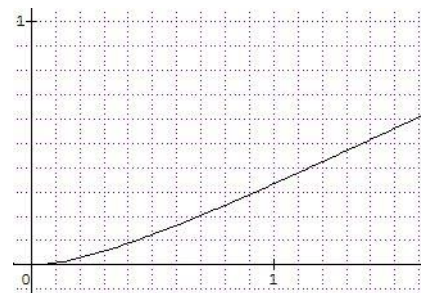
Question(s) n°2 *Oral HEC ECE 2007*

1. $S_1 = S(1+x)^2.$

2. $S_2 = S(1+2x)(1+y).$

3. $S_1 = S_2 \Leftrightarrow y = \frac{(1+x)^2}{(1+2x)} - 1 = \frac{1+2x}{1+2x} + \frac{x^2}{1+2x} - 1 = \frac{x^2}{1+2x}.$

4. $f'(x) = \frac{2x(x+1)}{(1+2x)^2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+. \text{ Donc } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.$



Question(s) n°3

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ (complexification i.e. multiplication en haut et en bas par } e^{-x}).$

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} = \frac{\ln x}{\ln x(x - \ln x / x)} = \frac{1}{x - \ln x / x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

Question(s) n°4

1. $y = 6x - 11$

2. $f'(x) = 1 \text{ (même coefficient directeur) } 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -0,5. \text{ En } -0,5 : y = x - 7,25.$

Question(s) n°5

1. a) Évident

b) $\Delta' = 32, k_1 = -3 - 2\sqrt{2}, k_2 = -3 + 2\sqrt{2} \text{ et } \Delta > 0 \text{ à l'extérieur des racines.}$

2. a) $(d_1) : y = x.$

b) $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1-x}{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1/2}.$

D'où : $(\sqrt{1/2}; \sqrt{1/2}) \text{ et } (-\sqrt{1/2}; -\sqrt{1/2}).$

3. a) Évident.

b) $f(x) = kx \Leftrightarrow \frac{1-x}{2x-1} = kx \Leftrightarrow P(x) = 0.$

c) Évident

Question(s) n°6 Oral HEC ECS 2009

2. On pose : $f(x) = e^x$ et $x = \ln a$, $y = \ln b$ et $z = \ln c$. Il vient :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{3}\ln a + \frac{1}{3}\ln b + \frac{1}{3}\ln c\right) &\leq \frac{1}{3}e^{\ln a} + \frac{1}{3}e^{\ln b} + \frac{1}{3}e^{\ln c} \\ \Leftrightarrow \exp\left(\frac{1}{3}\ln a\right) \times \exp\left(\frac{1}{3}\ln b\right) \times \exp\left(\frac{1}{3}\ln c\right) &\leq \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ \Leftrightarrow \exp\left(\ln a^{\frac{1}{3}}\right) \times \exp\left(\ln b^{\frac{1}{3}}\right) \times \exp\left(\ln c^{\frac{1}{3}}\right) &\leq \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} \times c^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} &\Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

En posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$:

$$(a'b'c')^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a'+b'+c'}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{abc}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \text{ par passage à l'inverse}$$

Question(s) n°7

1. Évident. 2. Signe de -1 à l'extérieur de 1 et -1 . 3. Évident.
4. Évident. 5. a) Évident. b) $f(x) - x \geq 0$ (C_f au-dessous de T) pour $x \leq 0 \dots$

Question(s) n°8

$$A = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left[(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})\right] = \ln[x^2 + 1 - x^2] = 0$$

Question(s) n°9 Oral HEC ECE 2010

$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2) > 0$ si $x > 1$ donc f est strictement croissante si $x > 1$. De plus, $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Question(s) n°10 Oral HEC ECS 2009

$$f'(x) = \frac{x(2-x) + 2(1-x)\ln(1-x)}{6x^3}. \quad 6x^3 > 0 \text{ sur }]0, 1[.$$

Pour étudier le signe de $g(x) = x(2-x) + 2(1-x)\ln(1-x)$, on étudie les variations de g sur

$$]0,1[: g'(x) = -2x - 2\ln(1-x) \text{ puis } g''(x) = -2 + \frac{2}{1-x} = \frac{2x}{1-x} > 0.$$

Dès lors, g' est strictement croissante sur $]0,1[$. Or, $g'(0) = 0$ donc $g'(x) \geq 0$ et g est strictement croissante sur $]0,1[$. Enfin, $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$ sur $]0,1[$.

Question(s) n°11

Oral HEC ECT 2011

2. Croissances comparées ou factorisation par x^2 .

3. a) $x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x \text{ du signe de } 1 \text{ à}$$

l'extérieur des racines précédentes.

5. $\lambda < f(x_2)$: pas de solution ;

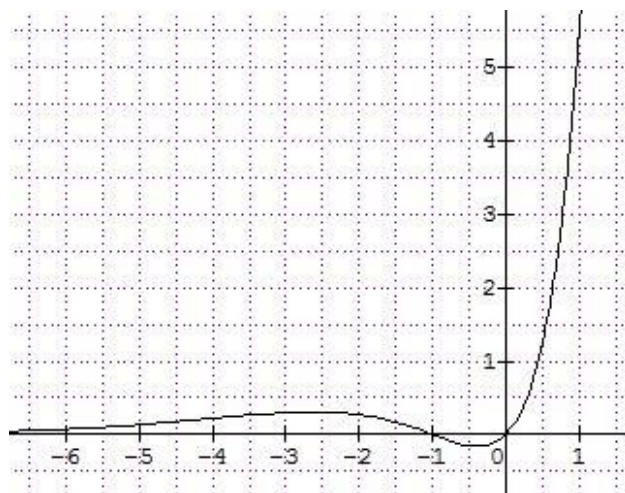
$\lambda = f(x_2)$: une seule solution ;

$f(x_2) < \lambda \leq 0$: deux solutions ;

$0 < \lambda < f(x_1)$: trois solutions ; $\lambda = f(x_1)$: deux solutions ; $\lambda > f(x_1)$: une solution.

6. $f''(x) = (x^2 + 5x + 4)e^x$, $f^{(3)}(x) = (x^2 + 7x + 9)e^x$. On démontre par récurrence que :

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + (2n+1)x + n^2)e^x \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

**Question(s) n°12**

1. $F(x) = x \ln x - x$

2. $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

3. $F(x) = \ln(1 + e^x)$

4. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(4x + 3)$

5. $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2}$

6. $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)}$

7. $F(x) = \ln x - \ln(x+1)$

8. $F(x) = (x+3)e^x$

9. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2$

Question(s) n°13

Oral HEC ECE 2012

1. $I_{n,0} = \int_0^1 x^n (1-x)^0 dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

2. $I_{n,p+1} = \int_0^1 x^n (1-x)^{p+1} dx$. IPP : $I_{n,p+1} = \frac{p+1}{n+1} I_{n+1,p}.$

$$3. I_{n,p} = \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1} = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} I_{n+2,p-2} = \dots = \frac{p(p-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (n+p)} I_{n+p,0},$$

$$I_{n,p} = \frac{p(p-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (n+p)} \times \frac{1}{n+p+1} = \frac{n! \times p!}{(n+p+1)!}.$$

Question(s) n°14

Oral HEC ECT 2011

$$2. f'(x) = \frac{-16(x+1)}{(2x+1)^2(2x+3)^2} > 0 \quad \text{si} \quad x < -1.$$

Attention, il y a deux valeurs interdites.

3. Voir ci-contre.

$$4. a) f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x+3} = \frac{a(2x+3) + b(2x+1)}{(2x+1)(2x+3)}$$

Le numérateur s'écrit : $(2a+2b)x + 3a+b$

On l'identifie à 2, c'est-à-dire :

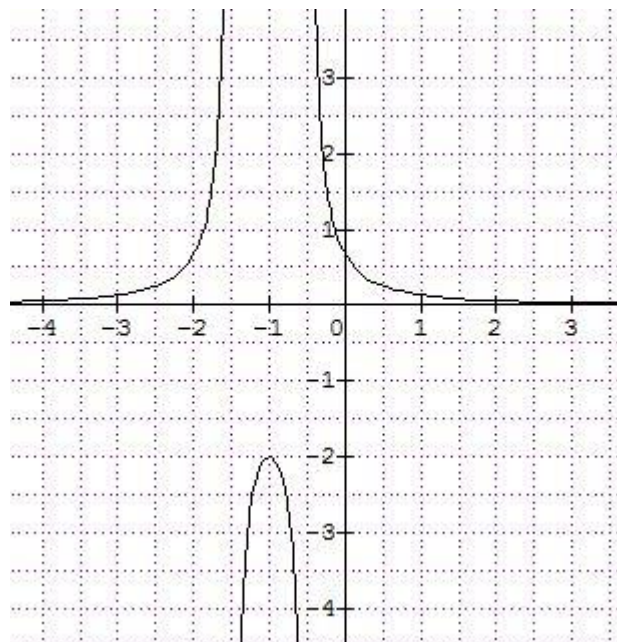
$$2a+2b=0 \quad \text{et} \quad 3a+b=2.$$

On obtient : $a=1$ et $b=-1$.

$$\text{Finalement, } f(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3}.$$

$$b) \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2t+1) - \frac{1}{2} \ln(2t+3) + \frac{1}{2} \ln(3) \quad \text{pour } t > 0.$$

$$c) \text{ Pour } t > 0, F(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2t+1}{2t+3}\right) + \frac{1}{2} \ln(3) \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{2} \ln(1) + \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{1}{2} \ln(3).$$

**Question(s) n°15**Première méthode : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 - n + 2}{n(n-1)}. (u_n) \text{ est strictement croissante pour } n \geq 3 \text{ et } u_2 = u_3.$$

Deuxième méthode : on étudie les variations de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. En effet, comme (u_n) est définie par formule explicite, monotonie de $f \Rightarrow$ monotonie de (u_n) .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}. \text{ Pour } x \geq 2 + \sqrt{2} \approx 3,4. (u_n) \text{ est strictement croissante à partir de } u_4.$$

De plus, $u_2 = u_3 < u_4$. Finalement, (u_n) est strictement croissante à partir de u_3 .

Question(s) n°16

1. Analysons la somme $u_n : u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Il s'agit d'une somme de n termes.

Le plus grand terme est $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\sqrt{n}$ est le plus petit des dénominateurs.

u_n est donc majorée par $u_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ termes}},$ c'est-à-dire $u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow u_n \leq \sqrt{n}.$

Le plus petit terme est $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ car $\sqrt{2n}$ est le plus grand des dénominateurs.

u_n est donc minorée par $u_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ termes}},$ c'est-à-dire $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} \Leftrightarrow u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$

En définitive, $u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$ Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty.$ Par théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

2. $\frac{1}{n^2+k}$ est majoré par $\frac{1}{n^2+1}$ et est minoré par $\frac{1}{n^2+n}.$ Or il y a n termes.

Donc $\frac{n}{n^2+n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2+1}.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$

Comme $n > 0,$ $\frac{n}{n^2+n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq n v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n = 1.$

Question(s) n°17

1. $u_1 + u_2 + u_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = -\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4.$

2. $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k) - \ln(k+1) = -\ln(n+1)$ (somme télescopique). $S_n \xrightarrow{+\infty} -\infty.$

Question(s) n°18

2. $u_n = (n+1)^2$. Hérédité : $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n+3 = (n+2)^2$.

Question(s) n°19

2. (w_n) est arithmétique de raison 2 et $w_n = 2n+1$.

Question(s) n°20

1. Hérédité :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4n + 4]}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \text{ (identité remarquable)}$$

2. Hérédité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ à l'aide de } \Delta.$$

Question(s) n°21

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3}.$$

$$v_0 = -\frac{1}{4}. \text{ Puis } v_n = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{4} \text{ et } u_n = \frac{1}{v_n} + 3.$$

Question(s) n°22

1. $u_1 = -\frac{5}{3}$, $u_2 = -\frac{14}{9}$ et $u_3 = -\frac{14}{27}$.

2. a) Récurrence. b) Récurrence ($u_{n+1} \geq n-2$). c) $+\infty$

3. $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2},$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n. \text{ Donc } v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

4. a)

```

S = 1
n=input("n ?")
for k = 1:n
    S = S + 25/4*(1/3)**k+3/2*k-21/4
end
disp(S)

```

b) $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4} = \frac{25}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^n 1,$

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4} \times (n+1),$$

$$S_n = \frac{75}{8} - \frac{75}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3n^2 + 3n}{4} - \frac{21}{4}n - \frac{21}{4} = \frac{33}{8} - \frac{75}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n.$$

Question(s) n°23

Oral HEC ECT 2009

2. a) Par récurrence forte u_n est entier non nul. Puis $u_{n+2} > u_{n+1}$.

b) Toute suite strictement croissante d'entiers diverge.

3. $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. a) $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$: évident. $-\frac{1}{a} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < 3 = \sqrt{9}, \text{ donc } 3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \text{ d'où } 1 < a < 2.$$

b) Récurrence forte.

$$\text{Hérédité : } u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1} - b^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n(a+1) - b^n(b+1)).$$

Or, $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$ (égalité vraie pour a et b), donc $a+1 = a^2$ et $b+1 = b^2$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{a^n} (a^n - b^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ car $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{a^2} < 1.$

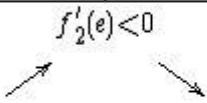
Question(s) n°24

Oral HEC ECE 2012

1. a) $f'_n(x) = \frac{n(\ln x)^{n-1} - x}{x}$ et $f''_n(x) = \frac{n}{x^2}(\ln x)^{n-2}(n-1-\ln x)$.

b) $f_1(x) = \ln x - x$. Une étude rapide des variations donne un maximum négatif en 1.

c) $f_2(x) = (\ln x)^2 - x$, $f'_2(x) = \frac{2}{x} \ln x - 1$ et $f''_2(x) = \frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$.

x	0	e	$+\infty$
$f''_2(x)$	+	0	-
f'_2	$f'_2(e) < 0$ 		
$f'_2(x)$	-		
f_2			

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ et $f_2(1) = -1 < 0$. Théorème de la bijection.

2. a) $f''_n(x)$ est du signe de $(n-1-\ln x)$ sur $]1; +\infty[$.

x	1	e^{n-1}	$+\infty$
$f''_n(x)$	+	0	-
f'_n			

$f'_n(1) = -1$, $f'_n(4) = \frac{n(2 \ln 2)^{n-1} - 2}{2} > 0$ car $\ln 2 \simeq 0,693$ et $n \geq 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = -1$.

Par théorème de la bijection, $f'_n(x) = 0$ possède deux solutions, α_n et β_n .

D'où :

x	1	α_n	$\beta_n + \infty$			
$f'_n(x)$	-	0	+	0	-	
f_n						

$f_n(1) = -1$ et $f_n(4) = (2 \ln 2)^n - 2 > 0$ car $\ln 2 \simeq 0,693$ et $n \geq 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

Par théorème de la bijection, $f_n(x) = 0$ possède deux solutions, u_n et v_n .

b) $f_n(2^n) = (n \ln 2)^n - 2 > 0$ car $(n \ln 2)^n \geq (3 \ln 2)^3 > 2$. Donc $v_n \geq 2^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. $f_n(e) = 1 - e < 0$. Donc $u_n \geq e$ (car $e < 4$).

Montrons que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante. $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (\ln u_{n+1})^{n+1} = u_{n+1}$, donc

$$f_n(u_{n+1}) = (\ln u_{n+1})^n - u_{n+1} = (\ln u_{n+1})^n - (\ln u_{n+1})^{n+1} = (\ln u_{n+1})^n (1 - \ln u_{n+1}) < 0$$

car $\ln u_{n+1} > 1$ car $u_{n+1} \geq e$.

On a donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ avec f_n strictement croissante sur $[e, u_n]$. Donc $u_{n+1} < u_n$.

$(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée. $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc convergente. Vers e .

Question(s) n°25

Oral HEC ECT 2010

2. a) $u_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^1} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

b) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(1+x^n) - (1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \right) dx,$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \right) dx > 0 \text{ (par positivité). Donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}$$

c) $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 1 dx = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

d) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc convergente.

e) $u_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - u_n$. Par ailleurs :

$$1 - u_n = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right) dx \leq \int_0^1 x^n dx,$$

$$1 - u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - u_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. a) Étude de la fonction $h(x) = \ln(1+x) - x$. $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ si $x \geq 0$.

h est donc décroissante. Or, $h(0) = 0$. Donc $h(x) \leq 0$ si $x \geq 0$.

D'où $\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$.

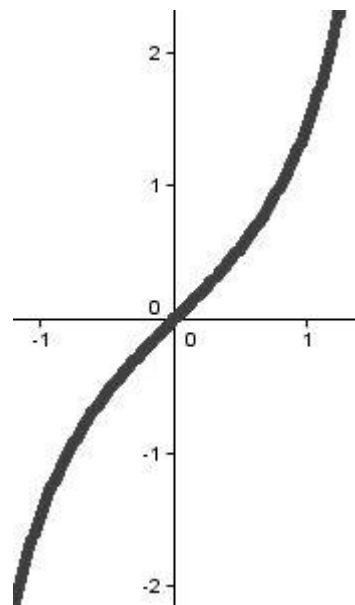
b) Si $0 \leq x \leq 1$, $x^n \geq 0$ donc $\ln(1+x^n) \leq x^n$. $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \geq 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$ par théorème d'encadrement.

Question(s) n°26

Oral HEC ECT 2010

2. a) $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[0, x]$, donc $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{x^2}$. Cette dernière est elle-même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = 2xe^{x^2}$ qui est continue. De plus, $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = \int_0^x -e^{u^2} du = -f(x)$ (changement de variables). f est impaire. Enfin, si $x \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ et f est convexe. Si $x \leq 0$, f est concave.



- b) $f'(x) = e^{x^2} > 0$.
3. a) f strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Théorème de la bijection.
- b) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$ car f croissante.
De plus, $u_n \geq 0$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.
- c) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq f(0)$ par continuité de f .

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 = f(0)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. a) Étude des fonctions $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = e^x - 1 - 2x$.

$f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0, \ln 2]$ donc f est croissante. Or $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$.

$g'(x) = e^x - 2 \leq 0$ sur $[0, \ln 2]$ donc g est décroissante. Or $g(0) = 0$. Donc $g(x) \leq 0$.

Question(s) n°27

$$M^n = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 + 16\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

Question(s) n°28

Oral HEC ECT 2010

- $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, donc $b = c$.
- $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bd \\ ab + bd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$ en tenant compte de $b = c$.

- Par identification, $M^2 = M \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ ab + bd = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a - a^2 \\ b(a + d) = b \\ b^2 = d - d^2 \end{cases}$

$$\hookrightarrow \text{Si } b = c = 0, M^2 = M \Leftrightarrow \begin{cases} a(1-a) = 0 \\ d(1-d) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ d = 0 \text{ ou } d = 1 \end{cases}.$$

$$\text{On obtient } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\hookrightarrow \text{Si } b \neq 0, b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq a^2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 1, \text{ de même } 0 \leq d \leq 1 \text{ et } b(a+d) = b \Leftrightarrow d = 1-a$$

$$\text{Dans ce cas, } M = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a-a^2} \\ \sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq a \leq 1 \text{ (on retrouve } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\hookrightarrow \text{Finalement, } M = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a-a^2} \\ \sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq a \leq 1 \text{ ou } M = O_2 \text{ ou } M = I_2.$$

Question(s) n°29

Oral HEC ECE 2008

$$1. K^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^3 = -I. \text{ D'où } -K^3 = I \Leftrightarrow K(-K^2) = I. K^{-1} = -K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. M(a, b, c) = aI + bK + cK^2.$$

$$\begin{aligned} M(a, b, c) \times M(a', b', c') &= (aI + bK + cK^2) \times (a'I + b'K + c'K^2), \\ &= aa'I + ab'K + ac'K^2 + a'bK + bb'K^2 + bc'K^3 + a'cK^2 + b'cK^3 + cc'K^4, \\ &= aa'I + (ab' + a'b)K + (ac' + bb' + a'c)K^2 + (bc' + b'c)K^3 + cc'K^4, \\ &= a'aI + (a'b + ab')K + (a'c + b'b + ac')K^2 + (b'c + bc')K^3 + c'cK^4, \\ &= M(a', b', c') \times M(a, b, c) \end{aligned}$$

Question(s) n°30

Oral HEC ECT 2009

$$1. J^2 = O_2 \text{ donc } J^0 = I, J^1 = J \text{ et } J^n = O_2 \text{ pour } n \geq 2.$$

$$2. A^{2009} = (5J + 2I)^{2009} = \sum_{k=0}^{2009} \binom{2009}{k} (5J)^k (2I)^{2009-k} = 2^{2009}I + 2009 \times 5J \times 2^{2008}I \text{ (Newton)}$$

$$A^{2009} = 2^{2009}I + 10045 \times 2^{2008}J = \begin{pmatrix} 2^{2009} + 10045 \times 2^{2008} & -10045 \times 2^{2008} \\ 10045 \times 2^{2008} & 2^{2009} - 10045 \times 2^{2008} \end{pmatrix}.$$

Question(s) n°31

Oral HEC ECE 2008

$$2. a) A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 \\ -9 & 19 & -27 \\ -6 & 12 & -17 \end{pmatrix} = -3A - 2I.$$

$$b) A^2 = -3A - 2I \Leftrightarrow A \left(\frac{A+3I}{-2} \right) = I. A^{-1} = \frac{A+3I}{-2} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ -3/2 & 2 & -9/2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$c) AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ -3/2 & 2 & -9/2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3. Hérédité :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (-1)^n \left[(1-2^n)A + (2-2^n)I \right] \times A = (-1)^n \left[(1-2^n)A^2 + (2-2^n)A \right],$$

$$A^{n+1} = (-1)^n \left[(1-2^n)(-3A-2I) + (2-2^n)A \right],$$

$$A^{n+1} = (-1)^n \left[(-3+3 \times 2^n + 2-2^n)A + (-2+2^{n+1})I \right],$$

$$A^{n+1} = (-1)^n \left[(-1+2 \times 2^n)A + (-2+2^{n+1})I \right] = (-1)^{n+1} \left[(1-2^{n+1})A + (2-2^{n+1})I \right].$$

$$\text{Pour } n = -1, (-1)^{-1} \left[(1-2^{-1})A + (2-2^{-1})I \right] = -\left(\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I \right) = A^{-1}.$$

Question(s) n°32

Oral HEC ECE 2008

1. $A^2 = 3A - 2I \dots$

2. $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 2$.

$$AX = X \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc 1 est valeur propre double associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$AX = 2X \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Donc 2 est valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres possibles de A. Ces valeurs sont-elles des valeurs propres ?

Question(s) n°33

Oral HEC ECE 2008

1. a) $A(a)X = aX \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } a \text{ est valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } a+3 \text{ est valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-a+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } -a+2 \text{ est valeur propre associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A(a) \text{ est diagonalisable avec } D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $X_{n+1} = A(0)X_n \Leftrightarrow X_n = (A(0))^n X_0$ (récurrence).

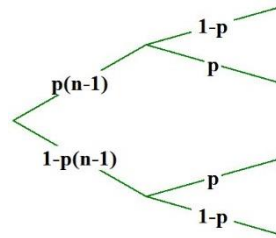
$$A(0) = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(A(0))^n = PD^nP^{-1} \text{ (récurrence) puis : } (A(0))^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n + 3 \times 2^n & 2 \times 3^n & 2 \times 3^n - 3 \times 2^n \\ 2 \times 3^n & 2 \times 3^n & 2 \times 3^n \\ 2 \times 3^n - 3 \times 2^n & 2 \times 3^n & 2 \times 3^n + 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } x_n = \frac{1}{6} \left[(2 \times 3^n + 3 \times 2^n)x_0 + (2 \times 3^n)y_0 + (2 \times 3^n - 3 \times 2^n)z_0 \right].$$

Question(s) n°34

Oral HEC ECE 2008



$$\text{FPT : } p_n = (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) = p_{n-1} - p \times p_{n-1} + p - p \times p_{n-1} = p + (1-2p)p_{n-1}.$$

$$(p_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique. } l = p + (1-2p)l \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On pose } v_n = p_n - \frac{1}{2}. \quad v_{n+1} = (1-2p)v_n \text{ avec } p_1 = 1-p \text{ donc } v_1 = \frac{1}{2} - p.$$

$$\text{Il vient : } v_n = \left(\frac{1}{2} - p\right)(1-2p)^{n-1} = \left(\frac{1-2p}{2}\right)(1-2p)^{n-1} = \frac{1}{2}(1-2p)^n \text{ et } p_n = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}.$$

$$p \in]0,1[\Leftrightarrow 2p \in]0,2[\Leftrightarrow -2p \in]-2,0[\Leftrightarrow 1-2p \in]-1,1[, \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-2p)^n = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

Question(s) n°35

Oral HEC ECT 2011

1. $P(\text{tirage unicolore}) = P((2 \text{ rouges}) \cup (2 \text{ noires}) \cup (2 \text{ bleues})),$

$p = P(2 \text{ rouges}) + P(2 \text{ noires}) + P(2 \text{ bleues})$ par incompatibilité,

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{N+5}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{N+5}{2}} + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{N+5}{2}} = \frac{3+1+\frac{N(N-1)}{2}}{\frac{(N+5)(N+4)}{2}} = \frac{8+N(N-1)}{(N+5)(N+4)}.$$

2 On cherche N telle que :

$$\frac{\binom{N}{2}}{\binom{N+5}{2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\frac{N(N-1)}{2}}{\frac{(N+5)(N+4)}{2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (N+5)(N+4) = 6N(N-1)$$

$$\Leftrightarrow 5N^2 - 15N - 20 = 0 \Leftrightarrow N^2 - 3N - 4 = 0 \Leftrightarrow N = 4 \text{ ou } N = -1 \text{ (impossible).}$$

$$\text{Pour } N = 4, p = \frac{8+4 \times 3}{9 \times 8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

Question(s) n°36

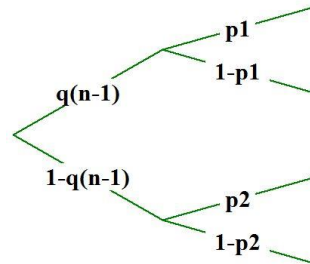
Oral HEC ECE 2007

$$P_R(U_1) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(U_1) \times P_{U_1}(R)}{P(U_1) \times P_{U_1}(R) + P(U_2) \times P_{U_2}(R)} = \frac{0,5p}{0,5p + 0,5\frac{p}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Question(s) n°37

Oral HEC ECE 2007

1. Soit q_n la probabilité de lancer la pièce 1 au n -ième lancer. On a :



$$\text{FPT : } q_n = q_{n-1} \times p_1 + (1 - q_{n-1}) \times (1 - p_2) = (1 - p_2) + (p_1 + p_2 - 1)q_{n-1}.$$

$$(q_n) \text{ SAG. On obtient : } l = \frac{1 - p_2}{2 - p_1 - p_2} \text{ puis } v_n = q_n - l \text{ est géométrique de raison}$$

$$p_1 + p_2 - 1 \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{1}{2} - l. \text{ Finalement, } q_n = \left(\frac{1}{2} - l\right)(p_1 + p_2 - 1)^{n-1} + l.$$

2. Même arbre, FPT : $r_n = q_{n-1} \times p_1 + (1 - q_{n-1}) \times p_2 = p_2 + (p_1 - p_2)q_{n-1}.$

$$\text{On a } q_{n-1} = \left(\frac{1}{2} - l\right)(p_1 + p_2 - 1)^{n-2} + l, \text{ d'où :}$$

$$r_n = p_2 + (p_1 - p_2) \left[\left(\frac{1}{2} - l\right)(p_1 + p_2 - 1)^{n-2} + l \right]$$

3. $p_1 + p_2 - 1 \in]-1, 1[$ donc :

$$L = p_2 + (p_1 - p_2)l = p_2 + (p_1 - p_2) \frac{1 - p_2}{2 - p_1 - p_2} = \frac{p_1 + p_2 - 2p_1p_2}{2 - p_1 - p_2}.$$

4. Dans cette question, on a : $I = \frac{5}{9}$, $r_n = \frac{14}{54} - \frac{1}{108} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $L = \frac{14}{54}$.

On a alors : $|r_n - L| = \frac{1}{108} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

n = 2

while 1/108*(0.5)**(n-2)>10**(-6)

n = n+1

end

disp(n)

Question(s) n°38

Oral HEC ECE 2008

2. a) D'après l'énoncé, on a : $P(A \cap \bar{I}) = 0,02$, $P(\bar{A} \cap I) = 0,002$ et $P(I) = 0,01$.

FPT : $P(A \cap I) = P(I) - P(\bar{A} \cap I) = 0,01 - 0,002 = 0,008$, puis à nouveau FPT :

$$P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap \bar{I}) = 0,008 + 0,02 = 0,028.$$

- b) $P(\bar{A} \cap I) + P(A \cap \bar{I}) = 0,002 + 0,02 = 0,022$.

c) $P_A(I) = \frac{P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{0,008}{0,028} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$.

3.

x_i	0	1000	5000	15000
p_i	0,97	0,02	0,008	0,002

$$E(X) = 90.$$

Question(s) n°39

Oral HEC ECE 2012

1. $P(U_k) = \frac{k}{1+2+\dots+N} = \frac{2k}{N(N+1)}.$

2. FPT : $P(E_n) = \sum_{k=1}^n P(U_k) \times P_{U_k}(E_n).$

Pour $P_{U_k}(E_n)$: loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{k}{N}\right)$ avec n boules rouges : $\binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{N(N+1)} \times \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \frac{2}{N(N+1)} \binom{2n}{n} \sum_{k=1}^n k \times \left(\frac{k}{N}\right)^n \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$$

Question(s) n°40

Oral HEC ECT 2011

La probabilité qu'un tirage soit unicolore est $\frac{5}{18}$ (voir question(s) 35 avec $N = 4$).

$$P(\text{tirage unicolore}) = P((2 \text{ rouges}) \cup (2 \text{ noires}) \cup (2 \text{ bleues})),$$

$p = P(2 \text{ rouges}) + P(2 \text{ noires}) + P(2 \text{ bleues})$ par incompatibilité,

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3+1+6}{36} = \frac{5}{18}.$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{5}{18}\right) \text{ (rédaction). } E(X) = \frac{25}{18}, V(X) = \frac{325}{324}.$$

Question(s) n°41

Oral HEC ECT 2010

$$1. E(X) = \frac{1}{p} = 2, V(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2. E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 6.$$

$$2. a) \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N k \times P(X = k) = E(X) = 2.$$

$$b) \sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k} \text{ est une somme croissante de termes positifs, donc } \sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{k}{2^k}.$$

$$\text{De même, } \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{2^k} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{2^k} = E(X^2) = 6.$$

Question(s) n°42

Oral HEC ECE 2009

$$2. X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X_1 = k) = p \times q^{k-1}. \text{ De même, } p(X_2 = k) = p \times q^{k-1}.$$

$$\text{Dès lors, } P(U = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X_1 = i) \cap (X_2 = k - i)) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X_1 = i) \times P(X_2 = k - i) \text{ par}$$

indépendance. Pour $k \geq 2$:

$$P(U = k) = \sum_{i=1}^{k-1} p \times q^{i-1} \times p \times q^{k-i-1} = p^2 q^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} 1 = (k-1) p^2 q^{k-2} \quad (U \hookrightarrow \mathcal{B}_N(2, p)).$$

(On vérifie bien que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(U = k) = 1$ – calcul intéressant à faire).

$$3. P(T=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = k+i) \cap (X_2 = i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = k+i) \times P(X_2 = i) \text{ par}$$

indépendance. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$P(T=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p \times q^{k+i-1} \times p \times q^{i-1} = \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 \times q^{k+2i-2} = p^2 \times q^{k-2} \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i}.$$

$$\text{Or, } \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i = \frac{1}{1-q^2}, \text{ donc } \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i} = \frac{1}{1-q^2} - 1 = \frac{1-1+q^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{q^2}{p(1+q)} \text{ car } p = 1-q.$$

$$\text{Il résulte, } P(T=k) = p^2 \times q^{k-2} \times \frac{q^2}{p(1+q)} = \frac{pq^k}{1+q}.$$

Notons que, en fait, $k \in \mathbb{Z}$ et $P(T=-k) = P(T=k)$.

$$\text{Finalement, si } k \geq 0, P(T=k) = \frac{pq^k}{1+q}, \text{ si } k < 0, P(T=k) = \frac{pq^{-k}}{1+q}.$$

(On vérifie bien que $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P(T=k) = 1$ – calcul intéressant à faire).

$$4. P(U=2) = p^2, P(T=0) = \frac{p}{1+q} \text{ et } P[(U=2) \cap (T=0)] = P[(X_1=1) \cap (X_2=1)] = p^2.$$

Les variables aléatoires U et T ne sont pas indépendantes.

Question(s) n°43

Oral HEC ECE 2012

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \in \{0, 1\}$. On obtient le tableau suivant :

$Y_k \setminus Y_{k+1}$	$Y_{k+1} = 0$	$Y_{k+1} = 1$	$Y_{k+1} = 2$	Loi de Y_k
$Y_k = 0$	q^3	pq^2	0	q^2
$Y_k = 1$	pq^2	pq	p^2q	$2pq$
$Y_k = 2$	0	p^2q	p^3	p^2
Loi de Y_{k+1}	q^2	$2pq$	p^2	1

On vérifie bien que la somme des nombres dans les 9 cases est égale à 1.

Par ailleurs, en fait, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$.

Exemple de calcul :

$$\begin{aligned} P((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)) \\ &= P(((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)) \cup ((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 1))) \\ &= P((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)) + P((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 1)) \end{aligned}$$

par incompatibilité,

$$= P(X_k = 0) \times (X_{k+1} = 1) \times (X_{k+2} = 0) + P(X_k = 1) \times (X_{k+1} = 0) \times (X_{k+2} = 1)$$

par indépendance,

$$= q \times p \times q + p \times q \times p = pq(p + q) = pq.$$

- $\text{cov}(Y_k, Y_{k+1}) = E(Y_k Y_{k+1}) - E(Y_k)E(Y_{k+1})$ avec :

$$E(Y_k) = E(Y_{k+1}) = 2pq + 2p^2 = 2p \text{ car } p + q = 1, \text{ et}$$

$$E(Y_k Y_{k+1}) = pq + 2p^2q + 2p^2q + 4p^3 = p(q + 4pq + 4p^2). \text{ D'où :}$$

$$\text{cov}(Y_k, Y_{k+1}) = p(q + 4pq + 4p^2) - 4p^2 = pq + 4p^2q + 4p^3 - 4p^2.$$

$$\text{cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq + 4p^2q + 4p^2(p - 1) = pq + 4p^2q - 4p^2q = pq.$$

2. Il suffit d'étudier $f(p) = p(1-p) = p - p^2$ sur $[0, 1]$.

p	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(p)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	0

Question(s) n°44

Oral HEC ECE 2010

2. a) On a :

$X \setminus Y$	$Y = 1$	$Y = 2$	...	$Y = n$	Loi de X
$X = 0$	$\frac{q^n}{n}$	$\frac{q^n}{n}$	...	$\frac{q^n}{n}$	q^n
$X = 1$	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	0	0	0	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$
$X = 2$	0	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	0	0	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$
...	0	0	...	0	...
$X = n$	0	0	0	$\binom{n}{n} p^n q^{n-n}$	$\binom{n}{n} p^n q^{n-n}$
Loi de Y	$\frac{q^n}{n} + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	$\frac{q^n}{n} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	...	$\frac{q^n}{n} + \binom{n}{n} p^n q^{n-n}$	1

$$\text{b) } E(Y) = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{q^n}{n} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) = \frac{q^n}{n} \sum_{k=1}^n k + \underbrace{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{\text{espérance loi binomiale } \mathcal{B}(n, p)},$$

$$E(Y) = \frac{q^n}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + np = \frac{n+1}{2} q^n + np.$$

Question(s) n°45

Oral HEC ECE 2012

2. On a :

$X \setminus Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	...	$Y = n$	...	Loi de X
$X = 0$	$e^{-\lambda} \binom{0}{0} p^0 q^{0-0}$	0	0	0	0	$e^{-\lambda}$
$X = 1$	$\lambda e^{-\lambda} \binom{1}{0} p^0 q^{1-0}$	$\lambda e^{-\lambda} \binom{1}{1} p^1 q^{1-1}$	0	0	0	$\lambda e^{-\lambda}$
$X = 2$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2} \binom{2}{0} p^0 q^{2-0}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2} \binom{2}{1} p^1 q^{2-1}$	...	0	0	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2}$
...	...	...	...	0	0	...
$X = n$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{0} p^0 q^{n-0}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	...	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{n} p^n q^{n-n}$	0	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$
...	...	...	...	...	...	...
Loi de Y						1

$$3. P(Y = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \times \binom{i}{k} p^k q^{i-k} = e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{i!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!} (\lambda p)^k (\lambda q)^{i-k},$$

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{i-k}}{(i-k)!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}}_{\text{série exponentielle}} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q},$$

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} e^{\lambda q} (\lambda p)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda + \lambda q} (\lambda p)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-q)} (\lambda p)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}.$$

Y suit la loi de Poisson de paramètre λp .

$$4. P(X - Y = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = k+i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = k+i) \times P_{(X=k+i)}(Y = i),$$

$$P(X - Y = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!} \times \binom{k+i}{i} p^i q^{k+i-i} = e^{-\lambda} q^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k \times \lambda^i}{(k+i)!} \times \frac{(k+i)!}{i!k!} p^i,$$

$$P(X - Y = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k q^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i \times p^i}{i!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda q)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda q)^k}{k!} e^{\lambda p},$$

$$P(X - Y = k) = \frac{e^{-\lambda} e^{\lambda p} (\lambda q)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda q)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda q} (\lambda q)^k}{k!}.$$

$X - Y$ suit la loi de Poisson de paramètre λq .

5. a) Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P(Y=i) = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^i}{i!}$ et $P(X-Y=j) = \frac{e^{-\lambda q} (\lambda q)^j}{j!}$. Donc :

$$P(Y=i) \times P(X-Y=j) = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^i}{i!} \times \frac{e^{-\lambda q} (\lambda q)^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda p} e^{-\lambda q} \lambda^i \lambda^j}{i! j!} p^i q^j = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+j}}{i! j!} p^i q^j.$$

De plus :

$$P[(Y=i) \cap (X-Y=j)] = P[(Y=i) \cap (X=i+j)] = P(X=i+j) \times P_{(X=i+j)}(Y=i),$$

$$P[(Y=i) \cap (X-Y=j)] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \times \binom{i+j}{i} p^i q^{i+j-i} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \times \frac{(i+j)!}{i! j!} p^i q^j,$$

$$P[(Y=i) \cap (X-Y=j)] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{i! j!} p^i q^j.$$

On a donc $P[(Y=i) \cap (X-Y=j)] = P(Y=i) \times P(X-Y=j)$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

Les variables aléatoires Y et $X-Y$ sont indépendantes.

b) • $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $V(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
- $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$, donc $V(Y) = \lambda p$ et $\sigma(Y) = \sqrt{\lambda p}$.
- Dans le cas général, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

Formule qui se généralise à : $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y)$

(car $\text{cov}(X, kY) = k \text{cov}(X, Y)$).

On a donc $V(X-Y) = V(X + (-Y)) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$.

Comme $X-Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$, $V(X-Y) = \lambda q$.

Il vient : $2\text{cov}(X, Y) = V(X) + V(Y) - V(X-Y) = \lambda + \lambda p - \lambda q$,

$$2\text{cov}(X, Y) = \lambda(1-q) + \lambda p = \lambda p + \lambda p = 2\lambda p.$$

Et donc : $\text{cov}(X, Y) = \lambda p$.

• Enfin : $\rho(X, Y) = \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda p}} = \frac{\lambda p}{\lambda \sqrt{p}} = \sqrt{p}.$

Question(s) n°46

Oral HEC ECT 2009

1. D'après le cours :

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b] \text{ alors : } E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ et } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

$$\text{On a donc, ici : } E(X) = \frac{1}{4}, V(X) = \frac{25}{48} \text{ et } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{2}{5}(x+1) & \text{si } -1 \leq x \leq 3/2 \\ 1 & \text{si } x > 3/2 \end{cases}.$$

2. $Y(\Omega) = [0, 9/4]$. On calcule la fonction de répartition F_Y de Y :

- si $y < 0$, alors : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$;
- si $0 \leq y \leq 1$, alors : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$,

$$F_Y(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \frac{2}{5}(\sqrt{y} + 1) - \frac{2}{5}(-\sqrt{y} + 1) = \frac{4}{5}\sqrt{y} ;$$
- si $1 < y \leq \frac{9}{4}$, alors : $F_Y(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \frac{2}{5}(\sqrt{y} + 1) - 0 = \frac{2}{5}(\sqrt{y} + 1)$
- si $y > \frac{9}{4}$, alors : $F_Y(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = 1 - 0 = 1.$

$$\text{On en déduit la fonction densité : } f(y) = \begin{cases} \frac{2}{5\sqrt{y}} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{5\sqrt{y}} & \text{si } 1 < y \leq 9/4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{D'où : } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \frac{2}{5} \int_0^1 \sqrt{y} dy + \frac{1}{5} \int_1^{9/4} \sqrt{y} dy.$$

$$\text{Or, } \int \sqrt{y} dy = \int y^{1/2} dy = \frac{y^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} y \sqrt{y}.$$

$$\text{On a donc : } E(Y) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} [y \sqrt{y}]_0^1 + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} [y \sqrt{y}]_1^{9/4} = \frac{2}{15} \left[2 + \frac{9}{4} \times \frac{3}{2} - 1 \right] = \frac{2}{15} \times \frac{35}{8} = \frac{7}{12}.$$

Question(s) n°47

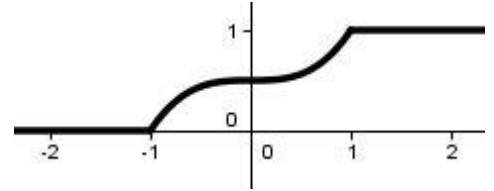
Oral HEC ECT 2009

2. f est continue, positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_{-1}^1 = 1$.

3. a) - si $x < -1$, $F(x) = 0$,

- si $-1 \leq x \leq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \left[\frac{t^3}{2} \right]_{-1}^x = \frac{x^3 + 1}{2}$.

- si $x > 1$, $F(x) = 1$.



b) Voir ci-contre.

c) $F(x) = 1/4 \Leftrightarrow x^3 = -0,5 \Leftrightarrow x = (-0,5)^{1/3}$, $F(x) = 1/2 \Leftrightarrow x = 0$, et $F(x) = 3/4 \Leftrightarrow x = 0,5^{1/3}$.

4. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{8} \right]_{-1}^1 = 0$.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^4 dx = \left[\frac{3x^5}{10} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{5}$.

Finalement, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5}$.

Question(s) n°48

Oral HEC ECT 2010

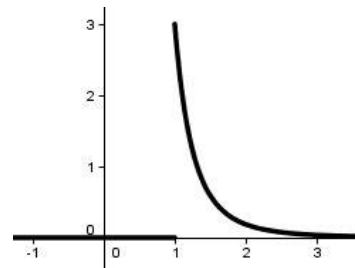
2. a) Évident : pas en 1.

b) Positivité + $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{x^3} \right]_1^{+\infty} = 0 + 1 = 1$ (écrire les limites).

3. a) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{12}{x^5} < 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

c) $F(x) = 1/2 \Leftrightarrow x = (2/3)^{1/3}$.



4. $E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx = \left[-\frac{3}{2x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2}$, $E(X^2) = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x} \right]_1^{+\infty} = 3$, $V(X) = \frac{3}{4}$.

Question(s) n°49

Oral HEC ECE 2010

$$1. \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{k}{x(x+1)} dx = k \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = k [\ln x - \ln(x+1)]_1^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = k \left[\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]_1^{+\infty} = k \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = k \ln 2. \text{ Il faut } k = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{k}{x+1} dx = k [\ln(x+1)]_1^{+\infty} \rightarrow +\infty. X \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

Question(s) n°50

Oral HEC ECE 2007

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{10}^{+\infty} \frac{c}{t^2} dt = c \left[-\frac{1}{t} \right]_{10}^{+\infty} = \frac{c}{10}. \text{ Donc } c = 10.$$

$$2. \text{ On cherche } m \text{ tel que : } F(m) = P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2} \text{ (médiane).}$$

$$\text{Or } F(t) = 0 \text{ si } t < 10 \text{ et } F(t) = 1 - \frac{10}{t} \text{ si } t \geq 10. F(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 20.$$

$$3. \text{ Pour un composant, } p = P(X \geq 15) = 1 - F(15) = 1 - 1 + \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Sur le lot de 5 composants, soit X le nombre de composants fonctionnant durant au moins

$$15 \text{ heures. } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{2}{3}\right) \text{ et } P(X \geq 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 3) = \frac{80 + 80 + 32}{3^5} = \frac{192}{243}.$$

$$4. \text{ Soit } X_1 \text{ la durée de vie du premier composant et soit } X_2 \text{ la durée de vie du deuxième composant. On suppose } X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendantes.}$$

$$T_A = \min(X_1, X_2) \text{ et } T_B = \max(X_1, X_2).$$

$$\bullet P(T_A \geq t) = P((X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t)) = P(X_1 \geq t) \times P(X_2 \geq t) \text{ par indépendance,}$$

$$P(T_A \geq t) = (1 - F(t))^2, \text{ donc } P(T_A \leq t) = F_{T_A}(t) = 1 - (1 - F(t))^2.$$

$$\text{Si } t < 10, F_{T_A}(t) = 0 \text{ et si } t \geq 10, F_{T_A}(t) = 1 - \frac{100}{t^2}. T_A \text{ a pour densité :}$$

Si $t < 10$, $f_{T_A}(t) = 0$ et si $t \geq 10$, $f_{T_A}(t) = \frac{200}{t^3}$.

- $P(T_B \leq t) = P((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)) = P(X_1 \leq t) \times P(X_2 \leq t)$ par indépendance,
 $P(T_B \leq t) = (F(t))^2$.

Si $t < 10$, $F_{T_B}(t) = 0$ et si $t \geq 10$, $F_{T_B}(t) = \left(1 - \frac{10}{t}\right)^2$. T_B a pour densité :

Si $t < 10$, $f_{T_B}(t) = 0$ et si $t \geq 10$, $f_{T_B}(t) = \frac{20}{t^2} - \frac{200}{t^3}$.

5. • $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_A}(t) dt = \int_{10}^{+\infty} \frac{200}{t^2} dt = \left[-\frac{200}{t} \right]_{10}^{+\infty} = 20 = E(T_A)$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_B}(t) dt = \int_{10}^{+\infty} \left(\frac{20}{t} - \frac{200}{t^2} \right) dt = \left[20 \ln t + \frac{200}{t} \right]_{10}^{+\infty} \rightarrow +\infty$: pas d'espérance.

Question(s) n°51

Oral HEC ECE 2007

1. a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$. Une densité de U est donc : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) Par cours : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

c) $P(U > x) = 1 - F(x)$. On a donc : $P(U > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

2. a) Le temps d'attente du client C est supérieur à x si les temps de passage des clients A et B aux guichets sont tous deux supérieurs à x : $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$.

b) U_1 et U_2 sont indépendantes, donc :

$$P(V > x) = P((U_1 > x) \cap (U_2 > x)) = P(U_1 > x) \times P(U_2 > x) = (P(U > x))^2.$$

c) $G(x) = P(V \leq x) = 1 - P(V > x) = 1 - (P(U > x))^2$. On en déduit :

$$\begin{cases} G(x) = 1 - 1^2 = 0 & \text{si } x < 0, \\ G(x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ G(x) = 1 - 0^2 = 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

d) La densité de probabilité g de la variable V est la dérivée de G . D'où :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ g(x) = 2 - 2x & \text{si } x \in [0, 1], \\ g(x) = 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

e) • Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt + \int_1^{+\infty} t g(t) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^0 t g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x > 1$.

$$\int_0^1 t g(t) dt = \int_0^1 t(2 - 2t) dt = \int_0^1 (2t - 2t^2) dt = \left[t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

V admet donc une espérance et $E(V) = \frac{1}{3}$.

• Calculons, si elle existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt$.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 g(t) dt + \int_0^1 t^2 g(t) dt + \int_1^{+\infty} t^2 g(t) dt.$$

Or, $\int_{-\infty}^0 t^2 g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $\int_1^{+\infty} t^2 g(t) dt = 0$ car $g(x) = 0$ si $x > 1$

$$\int_0^1 t^2 g(t) dt = \int_0^1 t^2 (2 - 2t) dt = \int_0^1 (2t^2 - 2t^3) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt = 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$. V admet donc une variance et :

$$\text{Var}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt - (E(V))^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Question(s) n°52

Oral HEC ECE 2008

1. F est strictement croissante, a pour limite 0 en $-\infty$ et pour limite 1 en $+\infty$.

2. La densité est $f(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F , et soit $Z = \max(X_1, X_2)$.

$P(Z \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x)$ par indépendance,

$P(Z \leq x) = (F(x))^2$. De façon générale, $P(Z \leq x) = (F(x))^n$.

Question(s) n°53

Oral HEC ECE 2008

$$1. \quad P(M_n \leq x) = (F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(2a)^n} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{M_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{(2a)^n} x^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x) dx = \frac{n}{(2a)^n} \int_0^{2a} x^n dx = \frac{n}{(2a)^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{2a} = \frac{n}{(2a)^n} \times \frac{(2a)^{n+1}}{n+1} = \frac{2na}{n+1}.$$

$$E(M_n^2) = \frac{n}{(2a)^n} \int_0^{2a} x^{n+1} dx = \frac{n}{(2a)^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^{2a} = \frac{n}{(2a)^n} \times \frac{(2a)^{n+2}}{n+2} = \frac{4na^2}{n+2}.$$

$$V(M_n) = \frac{4na^2}{n+2} - \left(\frac{2na}{n+1} \right)^2 = 4na^2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \frac{4na^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

$$2. \quad E(U_n) = \frac{n+1}{2n} E(M_n) = \frac{n+1}{2n} \times \frac{2na}{n+1} = a = E(X).$$

U_n est un estimateur sans biais de $E(X)$.

$$E(V_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = a.$$

V_n est un estimateur sans biais de $E(X)$.

Un estimateur est d'autant meilleur que son risque est faible.

$$r(U_n) = V(U_n) = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 V(M_n) = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \times \frac{4na^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{a^2}{n(n+2)} \approx \frac{a^2}{n^2}.$$

$$r(V_n) = V(V_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{3n} \quad \text{car } V(X_i) = \frac{(2a)^2}{12}.$$

Le meilleur estimateur est U_n .

Question(s) n°54

Oral HEC ECE 2007

1. On détermine tout d'abord $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\theta}(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{3x^3}{\theta^3} dx = \left[\frac{3x^4}{4\theta^3} \right]_0^{\theta} = \frac{3}{4} \theta.$$

$$E(X_i^2) = \int_0^{\theta} \frac{3x^4}{\theta^3} dx = \left[\frac{3x^5}{5\theta^3} \right]_0^{\theta} = \frac{3}{5} \theta^2. \text{ D'où } V(X_i) = \frac{3}{5} \theta^2 - \frac{9}{16} \theta^2 = \frac{3}{80} \theta^2.$$

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{3}{4} \theta = \frac{3n}{4} \theta.$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{3n}{80} \theta^2 \text{ (indépendance des variables).}$$

2. On détermine tout d'abord $F_{\theta}(x)$. $F_{\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$.

$$P([T \leq t]) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]\right) = \prod_{i=1}^n P([X_i \leq t]) \text{ par indépendance des variables,}$$

$$P([T \leq t]) = (F_{\theta}(t))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^{3n}}{\theta^{3n}} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

$$\text{Par dérivation, une densité de } T \text{ est : } \begin{cases} 3n \frac{x^{3n-1}}{\theta^{3n}} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$E(T) = \int_0^{\theta} 3n \frac{x^{3n}}{\theta^{3n}} dx = \left[\frac{3n}{3n+1} \frac{x^{3n+1}}{\theta^{3n}} \right]_0^{\theta} = \frac{3n\theta}{3n+1}.$$

$$E(T^2) = \int_0^{\theta} 3n \frac{x^{3n+1}}{\theta^{3n}} dx = \left[\frac{3n}{3n+2} \frac{x^{3n+2}}{\theta^{3n}} \right]_0^{\theta} = \frac{3n\theta^2}{3n+2}.$$

$$V(T) = \frac{3n\theta^2}{3n+2} - \frac{9n^2\theta^2}{(3n+1)^2} = \frac{3n\theta^2(3n+1)^2 - 9n^2\theta^2(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2},$$

$$V(T) = \frac{3n\theta^2[(3n+1)^2 - 3n(3n+2)]}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{3n\theta^2}{(3n+2)(3n+1)^2}.$$

3. a) On veut : $E(S') = E(aS) = aE(S) = a \frac{3n}{4} \theta = \theta$. D'où $a = \frac{4}{3n}$.

$$\text{Dans ce cas, } r(S') = V(S') = a^2 V(S) = \frac{16}{9n^2} \times \frac{3n}{80} \theta^2 = \frac{\theta^2}{15n}.$$

On veut : $E(T') = E(bT) = bE(T) = b \frac{3n\theta}{3n+1} = \theta$. D'où $b = \frac{3n+1}{3n}$.

$$\text{Dans ce cas, } r(T') = V(T') = b^2 V(T) = \frac{(3n+1)^2}{9n^2} \times \frac{3n\theta^2}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{\theta^2}{3n(3n+2)}.$$

b) $r(T') \approx \frac{\theta^2}{9n^2} \ll r(S')$. Le meilleur estimateur est T' .