HEC
PARIS

**ORAL HEC Paris 2018**

MATHÉMATIQUES

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option technologique**

# Exercice principal

1. Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.
Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) Établir l'encadrement : $-1 < s < 1$.

b) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.

c) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de $A$ ?

d) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux deux valeurs propres de $A$.

e) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

3. On rappelle que par convention, on pose $A^0 = I$, où $I$ est la matrice identité d'ordre 2.

a) Exprimer pour tout entier naturel $n$, la matrice $A^n$ sous forme de tableau.

b) Calculer en fonction de $a$ et $b$ la matrice $L = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n$, c'est-à-dire la matrice carrée dont les coefficients sont les limites des coefficients de $A^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# Exercice sans préparation

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

On note $T$ une variable aléatoire de densité $f$.

2. a) Calculer l'espérance de $T$.

   b) Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $T$.

# Corrigé de l'exercice principal

1. $\boxed{\text{Question de cours : définition d'une valeur propre d'une matrice.}}$

On appelle valeur propre d'une matrice carrée $A$ tout nombre réel $\lambda$ tel qu'il existe une matrice colonne non nulle $X$ vérifiant :

$$AX = \lambda X .$$

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose : $s = 1 - (a + b)$.

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. a) $\boxed{\text{Établir l'encadrement : } -1 < s < 1.}$

Comme $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, on a $0 < a + b < 2$ et donc, $-1 < s < 1$.

b) $\boxed{\text{Montrer que le polynôme } Q(X) = X^2 - (1+s)X + s \text{ est un polynôme annulateur de la matrice } A.}$

D'après le cours, si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors le polynôme $X^2 - (a+d)X + ad - bc$ est annulateur de $B$.

Ici, on a : $a + d = 1 + s$ et $ad - bc = s$, et $Q(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de $A$.

c) $\boxed{\text{Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de } A\text{ ?}}$

On sait que l'ensemble des valeurs propres de $A$ est inclus dans l'ensemble des racines de $Q$.
La résolution de l'équation $Q(X) = 0$ donne deux solutions 1 et $s$ qui sont donc des valeurs propres possibles.
Au passage, on remarque que ce sont deux racines distinctes car $s < 1$.

Remarque

Comme $A - I = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, 1 est valeur propre de $A$.

De même, comme $A - sI = \begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, $s$ est valeur propre de $A$.

d) $\boxed{\text{Montrer que les vecteurs } \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sont des vecteurs propres de } A \text{ associés aux deux valeurs propres de } A.}$

$A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, donc le vecteur non nul $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 1.

De même, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $s$.

e) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est-elle diagonalisable ?}}$

On pose : $P = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

On vérifie que $AP = PD$, d'où $D = P^{-1}AP$, et par définition, la matrice $A$ est diagonalisable.

3. a) $\boxed{\text{Exprimer pour tout entier naturel } n, \text{ la matrice } A^n \text{ sous forme de tableau.}}$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Les calculs donnent $P^{-1} = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix}$ et

$$A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + as^n & b(1-s^n) \\ a(1-s^n) & a + bs^n \end{pmatrix} .$$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Calculer en fonction de } a \text{ et } b \text{ la matrice } L = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n\text{, c'est-à-dire la matrice carrée dont les} \\ \text{coefficients sont les limites des coefficients de } A^n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.\end{array}}$

Puisque $|s| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$ et $L = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. $\boxed{\text{Montrer que } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

   La fonction $f$ est positive, continue sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

   car c'est l'espérance d'une loi $\mathcal{E}(1)$.[1]

On note $T$ une variable aléatoire de densité $f$.

2. a) $\boxed{\text{Calculer l'espérance de } T.}$

$$E(T) = \int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$$

   car c'est le moment (non centré) d'ordre 2 d'une loi $\mathcal{E}(1)$.

   b) $\boxed{\text{Déterminer la fonction de répartition } F \text{ de la variable aléatoire } T.}$

   Pour $x < 0$, on a $F(x) = 0$ et pour $x \geq 0$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}\ .$$

1. On peut utiliser avec profit les propriétés de la loi exponentielle de paramètre 1..

# EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.

2. Soit $r$ un réel tel que $r \neq -1$ et soit $g$ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1}\ .$$

   a) On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. Pour tout $x \in [0,1[$, calculer $g'(x)$.

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

   b) En déduire la relation $(*)$ suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n\ .$$

   c) À l'aide de la relation $(*)$, compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche $I_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1)   n=input ('donner une valeur de n:')
(2)   I= .........
(3)   for k=1 : n
(4)       I= .........
(5)   ......
(6)   disp(I)
```

   d) Calculer $I_1$.

4. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\,x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ .$$

   a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

   b) Déterminer la fonction de répartition $F$ d'une variable aléatoire de densité $f$.

# EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. a) Montrer que le réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si, il vérifie l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \ .$$

b) Quelles sont les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$) de $A$ ?

2. a) Déterminer les vecteurs propres de $A$, associés aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ respectivement.

b) Montrer que $A$ est diagonalisable.

# Corrigé de l'exercice principal

1. $\boxed{\text{Question de cours : définition d'une densité de probabilité.}}$

Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue sauf au plus en un nombre fini de points et si elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

2. Soit $r$ un réel tel que $r \neq -1$ et soit $g$ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ g(x) = -\frac{1}{r+1}(1-x)^{r+1} \ .$$

a) $\boxed{\text{On note } g' \text{ la fonction dérivée de } g. \quad \text{Pour tout } x \in [0,1[, \text{ calculer } g'(x).}$

On trouve : $g'(x) = (1-x)^r$.

b) $\boxed{\text{Calculer l'intégrale } \int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.}$

Avec $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\left[(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot$

3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \ .$$

On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

En dérivant $x \longmapsto x^{n+1}$ et en utilisant une primitive de $x \longmapsto (1-x)^{\frac{1}{2}}$, une intégration par parties donne : $I_{n+1} = \left[-\dfrac{2}{3}x^{n+1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \dfrac{2(n+1)}{3}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$, soit encore :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \, .$$

b) En déduire la relation $(*)$ suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\,I_n \ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant les égalités $x^n(1-x)^{\frac{3}{2}} = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x) = x^n(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{n+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}$, on parvient à

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$$

puis :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\, I_n \,.$$

c) À l'aide de la relation (∗), compléter les lignes (2), (4) et (5) du script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche $I_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I= .........
(3)  for k=1 : n
(4)      I= .........
(5)  ......
(6)  disp(I)
```

En complétant les lignes (2), (4) et (5), on obtient :

```
(1)  n=input ('donner une valeur de n:')
(2)  I=2/3
(3)  for k=1 : n
(4)      I=(2*(k+1)/(2*k+5))*I
(5)  end
(6)  disp(I)
```

d) Calculer $I_1$.

Pour $n = 0$ et $I_0 = \dfrac{2}{3}$, la relation (∗) donne : $I_1 = \dfrac{4}{15}$.

4. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\, x\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

La fonction $f$ est continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{4}\, I_1 = 1$.

b) Déterminer la fonction de répartition $F$ d'une variable aléaléatoire de densité $f$.

On trouve : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{3}{2}x\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. a) $\boxed{\text{Montrer que le réel } \lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ si, et seulement si, il vérifie l'équation : } \lambda^2 - \lambda = 0 .}$

Le réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible (cours), ce qui donne $\lambda^2 - \lambda = 0$ (on utilise, par exemple, la nullité du déterminant d'ordre 2).

b) $\boxed{\text{Quelles sont les valeurs propres } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2\ (\lambda_1 > \lambda_2) \text{ de } A\,?}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

2. a) $\boxed{\text{Déterminer les vecteurs propres de } A, \text{ associés aux valeurs propres } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ respectivement.}}$

• Les vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont les vecteurs $U = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.

• Les vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ sont les vecteurs $V = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

b) $\boxed{\text{Montrer que } A \text{ est diagonalisable.}}$

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Comme $P$ est inversible, $P^{-1}AP = D$ et la matrice $A$ est donc diagonalisable.