

Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2022

Le bilan de la session 2022 de mathématiques voie T est satisfaisant

Cette année les notes se sont étalées entre 6 et 19. La moyenne s'établit à 11,33 et l'écart-type à 3,66.

Le niveau d'ensemble des candidats nous a semblé un peu plus homogène que l'année dernière : il n'y a pas eu de prestations catastrophiques, mais aussi un peu moins de prestations brillantes.

Le jury insiste à nouveau sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Le candidat doit vraiment s'attendre à se voir demandé une esquisse qualitative après un tableau de variation.
- Malgré quelques progrès, il faut rester vigilant sur les calculs.
- Les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.
- Il n'y avait pas cette année de question d'informatique dans les exercices proposés : il est fort probable que l'an prochain elles fassent leur retour l'an prochain.
- Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.
- La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T1

Exercice principal T1

Soient k et n deux entiers naturels supérieur ou égal à 2 fixé.

Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3 et l'on effectue n tirages avec remise.

Pour $j \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note N_j le nombre de jetons numéroté(s) j tiré(s).

Ainsi, N_1 représente le nombre de jeton n°1 tiré(s) en n tirages.

1. **Question de cours** : loi binomiale : protocole, loi, espérance, variance.
2. (a) Déterminer la loi de N_1 .
(b) Montrer que $N_1 + N_2$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Donner sa variance et son espérance.
(c) Déterminer la covariance de N_1 et de N_2 ainsi que leur coefficient de corrélation linéaire.
3. On note maintenant, pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, X_j la variable de Bernoulli qui vaut 1 si au moins un jeton numéroté j est tiré.
(a) Déterminer la loi commune à X_1 et à X_2 .
(b) Calculer la covariance de X_1 et de X_2 .
4. On note $Z = \sum_{j=1}^3 X_j$.
(a) Que représente la variable Z ?
(b) Donner la loi de Z quand $n = 3$.

Solution :

1. Protocole ("nombre de succès" pour n expériences identiques et indépendantes), $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. (Programme ECT1 page 12)
2. (a) Les tirages sont identiques et indépendants (avec remise)
$$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$$

(b) $N_1 + N_2$ désigne le nombre de fois où l'on a obtenu la boule n°1 ou la boule n°2 : on effectue toujours n expériences, mais on change la définition du succès
$$N_1 + N_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right), \mathbb{E}(N_1 + N_2) = \frac{2n}{3}, V(N_1 + N_2) = \frac{2n}{9}$$

(c) On utilise la formule $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2cov(N_1, N_2)$
Ainsi comme $V(N_1) = V(N_2) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$, on obtient $cov(N_1, N_2) = \frac{-n}{9}$
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{-cov(N_1, N_2)}{\sigma(N_1)\sigma(N_2)} = \frac{-n/9}{2n/9} = \frac{-1}{2}$$
3. (a) $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(N_1 = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

- (b) Il faut calculer $\mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

Mais $X_1 X_2$ est aussi une variable de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 + N_2 \neq 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - (\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2}$$

4. (a) Z représente le nombre de fois où la variable X_j vaut 1 :

$\boxed{\text{c'est le nombre de jetons différents qui vont sortir au cours des } n \text{ tirages.}}$

- (b) On n'a pas une binomiale car les variables X_j ne sont pas identiques et indépendantes.

$$Z(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

- i. $[Z = 1]$ ssi les 3 tirages donnent le même jeton.

$[Z = 1] = [N_1 = 3] \cup [N_2 = 3] \cup [N_3 = 3]$. 3 événements incompatibles, on somme les probabilités.

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{9}}$$

- ii. $[Z = 3]$ ssi les trois tirages donnent des jetons différents.

On peut proposer $[Z = 3] = A_2 \cap A_3$ avec A_i " le i -me tirage donne un jeton qui n'a jamais été tiré."

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}([Z = 3]) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\text{iii. } \mathbb{P}([Z = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z = 1]) - \mathbb{P}([Z = 3]) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Exercice sans préparation T1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x^2-1} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle continue ?
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans un ensemble à déterminer.

Solution :

1. Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}_-,]0; 1[$ et $]1, +\infty[$
 Mais comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est aussi continue en 0, donc sur $] -\infty; 1[$

f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1, +\infty[$

2. $\forall x \in] -\infty; 0[, f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$
 $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} < 0.$

D'où le tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$	$ $ $-\infty$	$ $ 1 $\searrow$

Note on a $f(0) = 0$, et f n'est pas dérivable en 0, mais la continuité en 0 suffit pour montrer que f est strictement croissante sur $] -\infty; 1[$

Pour les limites : ils ne connaissent pas la notion d'équivalent, mais on un "truc" sur les fractions de polynômes

Avec le théorème de la bijection monotone f réalise deux bijections respectivement de $] -\infty; 1[$ dans lui même et de $]1; +\infty[$ dans lui même

Comme les deux intervalles d'arrivées ne se recoupent pas, on a bien une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En effet chaque élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ est bien atteint une et une seule fois.

3. Question supplémentaire : chercher l'expression explicite de la bijection réciproque de f

Donc, d'après le tableau, $f^{-1}(y) > 0$ si $y < 0$ ou $y > 1$

On résout alors l'équation $f(x) = y$, mais quelle expression de $f(x)$ utiliser ? Cela dépend de la valeur de y .

On voit que $x > 0$ ssi $f(x) < 0$ ou $f(x) > 1$

Pour $y < 0$ ou $y > 1$ on résout donc $\frac{x^2}{x^2-1} = y$ ssi $x^2 = \frac{y}{y-1}$

Pour $y < 0$ ou $y > 1$, $\frac{y}{y-1} > 0$ et donc, comme on cherche $x > 0$

Pour $y \in \mathbb{R}_-^* \cup]1; +\infty[, f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{y-1}}$

De même $x \leq 0$ ssi $f(x) \in]0; 1[$

On résout $\frac{x^2}{x^2+1} = y$ ssi $x^2 = \frac{y}{1-y}$

On a bien $\frac{y}{1-y} \geq 0$ et on cherche $x \leq 0$

Pour $y \in [0; 1[, f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$

SUJET T2

Exercice principal T2

1. **Question de cours** : définition des valeurs propres d'une matrice.

Soit a un réel non nul.

On pose alors $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 3 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 3 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M .
3. (a) Exprimer M^2 en fonction de M .
(b) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?
(c) Montrer que M n'est pas inversible.
4. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1}M$.
(b) Exprimer B^p en fonction de p , I et M pour $p \in \mathbb{N}$.
5. Trouver deux vecteurs non proportionnels de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solutions de l'équation $x + ay + a^2z = 0$. Que peut-on dire de ces vecteurs?

Solution :

Bien lire le programme officiel, qui proscriit la résolution de système, ne donne pas le théorème de diagonalisation, mais incite à utiliser les polynômes annulateurs

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ ssi il existe une matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle tel que $MX = \lambda X$. (programme ECT2 page 7.)

2. $M \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur est non nul.

C'est un vecteur propre de M

3. (a) $M^2 = 3M$

(b) Si λ est une valeur propre, alors $\lambda^2 = 3\lambda$: les seules valeurs propres possibles sont 0 et 3.

(c) Comme $M^2 = 3M$, si M était inversible on multiplierait par M^{-1} et l'on aurait $M = 3I$, ce qui n'est pas le cas.

M n'est pas inversible

4. (a) Par récurrence.

Au rang 1, $M^1 = 3^0 M$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si on suppose la propriété vraie au rang n , $M^{n+1} = M^n.M = 3^{n-1}M^2 = 3^n.M$. C'est la propriété au rang $n+1$.

La propriété est héréditaire

$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = 3^{n-1}M$.

(b) On a $B = M + 2I$, or $M(2I) = 2M = M(2I)$, on peut utiliser le binôme de newton.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k (2I)^{n-k}$$

Pour $n \geq 1$, on peut couper la somme :

$$B^n = (2I)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3^{k-1} M) (2I)^{n-k}$$

$$B^n = 2^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 2^{n-k} M$$

$$\text{On factorise par la matrice } M : \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 2^{n-k} M = \frac{1}{3} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \cdot 2^{n-k} \right) - 1 \right) M$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* : B^n = 2^n I + \frac{1}{3} (5^n - 1) M}$$

Remarque : cette formule reste vraie pour $n = 0$

5. On peut proposer $X = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et par exemple $Y = \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La résolution des systèmes linéaires autre que les systèmes de Cramer n'est pas au programme.

On calcule $MX = 0$ et $MY = 0$, les vecteurs sont non nuls, ce sont des vecteurs propres.

Poser à l'oral la question : à votre avis, M est-elle diagonalisable (habituellement, on leur donne P et D et on leur fait vérifier $PD = MP \dots$)

Exercice sans préparation T2

Soit p un réel de $]0; 1[$. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant chacune une loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

On note $Y = X_1X_2$ et $Z = X_2X_3$.

1. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre Y et Z .
2. Calculer $V(Y + Z)$.

Solution :

1. Comme X_1 et X_2, X_3 sont indépendants :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = p^2 \text{ et } \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2^2)\mathbb{E}(X_3)$$

X_2^2 suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre p

$\text{Cov}(Y, Z) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$ (On peut poser à l'oral la question de l'indépendance.)

$$\mathbb{E}(Y^2) = p^2 \text{ et } V(Y) = p^2 - p^4, \text{ donc } \rho(X, Y) = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p)(1+p)} = \frac{p}{1+p} \text{ qui est bien dans }]-1; 1[$$

2. Par bilinéarité de la covariance $V(Y + Z) = V(Y) + V(Z) + 2\text{Cov}(Y, Z) = 2p^3(1 - p) + 2p^2(1 - p)(1 + p)$

$$V(Y + Z) = 2p^2(1 - p)(1 + 2p)$$

3. Question supplémentaire : donner la loi de $Y + Z$.

$$(Y + Z)(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\mathbb{P}([Y + Z = 2]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = p^3$$

* On peut utiliser $2p^2 = \mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{P}([Y + Z = 1]) + 2p^3$

* On peut aussi traduire $[Y + Z = 1] = [X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0] \cup [X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1]$ (incompatible)

$$\mathbb{P}([Y + Z = 1]) = 2p^2 - 2p^3$$

$$\text{Et donc } \mathbb{P}([Y + Z = 0]) = 1 - 2p^2 + p^3$$