

CORRECTION DU DEVOIR N°01

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques 2 cm) de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f .

f existe $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 0$ donc $Df = \mathbb{R}_+^*$.

2- Compléter le programme suivant pour définir en Scilab la fonction f .

```
function res=f(zozo)
    res=log(zozo)/zozo
endfunction
```

3- Déterminer les limites aux bornes de Df

□ **limite en $+\infty$**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ croissances comparées

La droite Δ (D est utilisée à la question 8) d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ revient à étudier le signe de $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = f(x) - 0 = f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$\forall x \in Df, x > 0$ donc $f(x) - y_\Delta$ est du signe de $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+
position	$\mathcal{C}$ est en dessous de Δ	$\mathcal{C}$ coupe Δ en (1 ; 0)	$\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ

□ **limite en 0^+**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{cases}$$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

**4- Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
Dresser le tableau de variation de f**

f est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$\forall x \in Df, x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$

Pour étudier le signe de $1 - \ln(x)$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $1 - \ln(x) \geq 0$

$$1 - \ln(x) \geq 0$$

$$\ln(x) \leq 1$$

$x \leq e$ car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où le signe de $1 - \ln(x)$: $\begin{array}{c} + \\ \parallel \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} - \\ \oplus \\ e \end{array} \rightarrow$

D'où le tableau de variations de f

x	e			$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $1/e$ $\searrow$ 0		

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

Rappel : $\frac{1}{e} = e^{-1} \approx 0,4$.

5- Étudier la convexité.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

f' est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall x \in Df, f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(-3 + 2\ln(x))}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$$

$\forall x \in Df, x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-3 + 2\ln(x)$

Pour étudier le signe de $-3 + 2\ln(x)$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $-3 + 2\ln(x) \geq 0$

$$-3 + 2\ln(x) \geq 0$$

$$\ln(x) \geq \frac{3}{2}$$

$x \geq e^{\frac{3}{2}}$ car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où le signe de $-3 + 2\ln(x)$: $\begin{array}{c} - \\ \parallel \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} + \\ \oplus \\ e^{\frac{3}{2}} \end{array} \rightarrow$

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
	−	+	
convexité	f est concave	B est un point d'inflexion	f est convexe

$$B \text{ de coordonnées } \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \right) \text{ car } f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(\frac{e^3}{2}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

6- Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

$$A \in \mathcal{C} \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \in Df$$

Conclusion :

Le point A, intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, admet pour coordonnées (1 ;0)

7- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en ce point A puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 est donnée par

$$T: y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{avec } f'(1) = \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = 1 \text{ et } f(1)=0$$

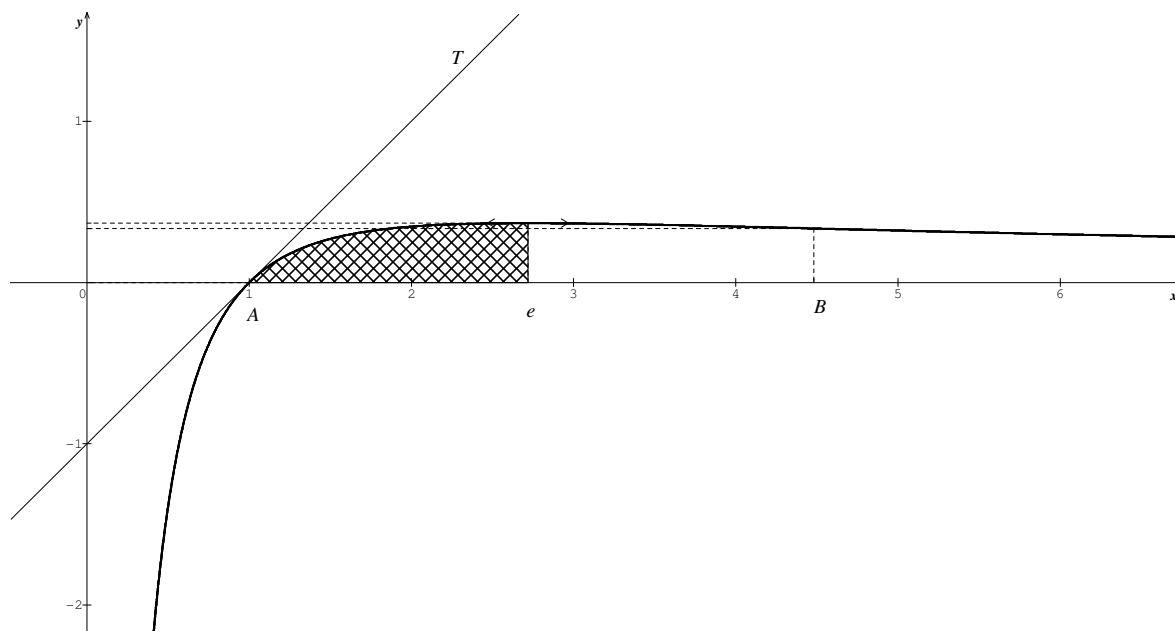
$$\text{donc } T: y = 1(x - 1) + 0 \text{ i.e. } y = x - 1$$

Conclusion :

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 est $y = x - 1$

De plus $\forall x \in]0, e^{\frac{3}{2}}]$, f est concave et $1 \in]0, e^{\frac{3}{2}}]$ donc T est au-dessus de $\mathcal{C}$

8- Représenter graphiquement T et $\mathcal{C}$ dans le même repère.



9- Soit D le domaine plan limité par les droites d'équations $x=1, x=e$, la courbe et l'axe des abscisses. Calculer l'aire, en cm^2 , de ce domaine plan

si $1 \leq x \leq e$, $f(x) \geq 0$ d'après la question 2 donc $\mathcal{E}$ est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire demandée, hachurée sur le graphique, est donnée ; en ua, par $\int_1^e f(x) dx$

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_1^e = \frac{1}{2} \ln^2(e) - \frac{1}{2} \ln^2(1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

car $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x)$. On reconnaît $u' \times u^\alpha$ avec $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $\alpha = 1$

or $1 \text{ ua} = 2 \times 2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$

Conclusion : L'aire, en cm^2 , de ce domaine plan est $\mathcal{A} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ cm}^2$

Exercice 2 :

Dans une population donnée, 56% des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24% sont propriétaires de leur logement.

1- On choisit une famille au hasard dans la population considérée. Quelles est :

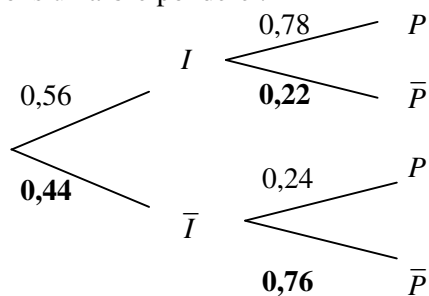
a) la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement ?

On note respectivement I et $\bar{I}$ les événements suivants :

I : « la famille occupe une maison individuelle » ;

$\bar{I}$: « la famille est propriétaire »

Faisons un arbre pondéré :



I et $\bar{I}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(P) &= p(P \cap I) + p(P \cap \bar{I}) \\ &= p(I)p_I(P) + p(\bar{I})p_{\bar{I}}(P) \\ &= 0,56 \times 0,78 + (1 - 0,56) \times 0,24 \\ &= 0,4368 + 0,1056 \\ &= 0,5424 \end{aligned}$$

Conclusion :

La probabilité qu'une famille soit propriétaire de son logement est 0,5424

b) la probabilité pour qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?

$$p(\bar{P}) = 1 - p(P) = 1 - 0,5424 = 0,4576 \neq 0$$

$$p_{\bar{P}}(I) = \frac{p(\bar{P} \cap I)}{p(\bar{P})} = \frac{p(I)p_I(\bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{0,56 \times 0,22}{0,4576} = \frac{0,1232}{0,4576} = \frac{1232}{4576} = \frac{16 \times 11 \times 7}{16 \times 11 \times 26} = \frac{7}{26}$$

Conclusion :

La probabilité qu'une famille habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire est $\frac{7}{26}$

2- On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. On suppose que les choix successifs sont indépendants. On appelle X le nombre de familles propriétaires de leur logement.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

L'épreuve consiste à interroger une famille. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "la famille est propriétaire de son logement" de probabilité 0,5424
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - 0,5424 = 0,4576$

L'expérience se répète 5 fois de **manière identique et indépendante**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 5 expériences.

Conclusion :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 0,5424)$

$$X(\Omega) = \llbracket 0 ; 5 \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0 ; 5 \rrbracket, p(X = k) = \binom{5}{k} (0,5424)^k (0,4576)^{5-k}$$

b) Calculer l'espérance de X et la variance de X .

$$E(X) = np = 5 \times 0,5424 = 2,712$$

$$V(X) = npq = 2,712 \times 0,4576 = 1,24101$$

c) Calculer la probabilité d'avoir au moins un propriétaire

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,4576)^5$$

d) Calculer la probabilité d'avoir au moins une famille **non propriétaire**

Attention la question est posée en échec

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - (0,5424)^5$$