

**CORRECTION DU DEVOIR N°02**

**Exercice 1 :**

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x, \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(1+x)$$

**1- Déterminer  $Df$  et  $Dg$**

$f$  existe  $\Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$  donc  $Df = ]-1; +\infty[$

$g$  existe  $\Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$  donc  $Dg = ]-1; +\infty[$

**Dans la suite de l'exercice on étudiera  $f$  et  $g$  sur  $[0, 1]$**

**2- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0, 1]$  et en déduire le signe de  $f(x)$  sur cet intervalle.**

$f$  est dérivable sur  $[0, 1] \subset Df$  comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

$\forall x \in [0, 1], \quad 1+x > 0$  et  $-x \leq 0$  donc  $f'(x) \leq 0$  et par suite  $f$  est décroissante sur  $[0, 1]$ .

|         |   |            |
|---------|---|------------|
| $x$     | 0 | 1          |
| $f'(x)$ | - |            |
| $f(x)$  | 0 | $\ln(2)-1$ |

$$f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \ln(1+1) - 1 = \ln(2) - 1$$

D'après le tableau de variations  $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq 0$

**Remarque sans la tableau de variations**

$\forall x \in [0, 1], \quad f(1) \leq f(x) \leq f(0)$  car  $f$  est décroissante

or  $f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$  donc  $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq 0$

**Conclusion :  $f$  est décroissante et négative sur  $[0, 1]$ .**

**3- Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $[0, 1]$  et en déduire le signe de  $g(x)$  sur cet intervalle.**

$g$  est dérivable sur  $[0, 1] \subset Dg$  comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in [0, 1], \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{2x}{2} = \frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

$\forall x \in [0, 1], \quad 1+x > 0$  et  $x^2 \geq 0$  donc  $g'(x) \geq 0$  et par suite  $g$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

|         |   |        |
|---------|---|--------|
| $x$     | 0 | 1      |
| $g'(x)$ | + |        |
| $g(x)$  | 0 | $g(1)$ |

$$g(0) = \ln(1+0) - 0 + \frac{0^2}{2} = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \ln(1+1) - 1 + \frac{1^2}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

D'après le tableau de variations  $\forall x \in [0, 1], \quad g(x) \geq 0$

Remarque sans la tableau de variations

$\forall x \in [0,1], g(0) \leq g(x) \leq g(1)$  car  $g$  est croissante  
or  $g(0)=0$  donc  $\forall x \in [0,1], g(x) \geq 0$

**Conclusion :  $g$  est croissante et positive sur  $[0,1]$ .**

**4- En déduire**  $\forall x \in [0,1], x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

D'après la question 2,  $\forall x \in [0,1], f(x) \leq 0$  d'où  $\ln(1+x) - x \leq 0$  donc  $\ln(1+x) \leq x$

D'après la question 2,  $\forall x \in [0,1], g(x) \geq 0$  d'où  $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$  donc  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

**Conclusion :  $\forall x \in [0,1], x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$**

**5- Déterminer  $Dh$**

$$h(x) = \ln(1+x)$$

$h$  existe  $\Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$  donc  **$Dh = ]-1; +\infty[$**

**6- Calculer les limites de  $h$  aux borne de  $Dh$**

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1+x) = 0^+ \\ \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \end{cases}$$

**La droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $h$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty \end{cases}$$

**Étude des branches infinies**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x} = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

**$\mathcal{C}$  admet une branche parabolique de direction  $(Ox)$  en  $+\infty$**

**7- Dresser le tableau de variation de  $h$**

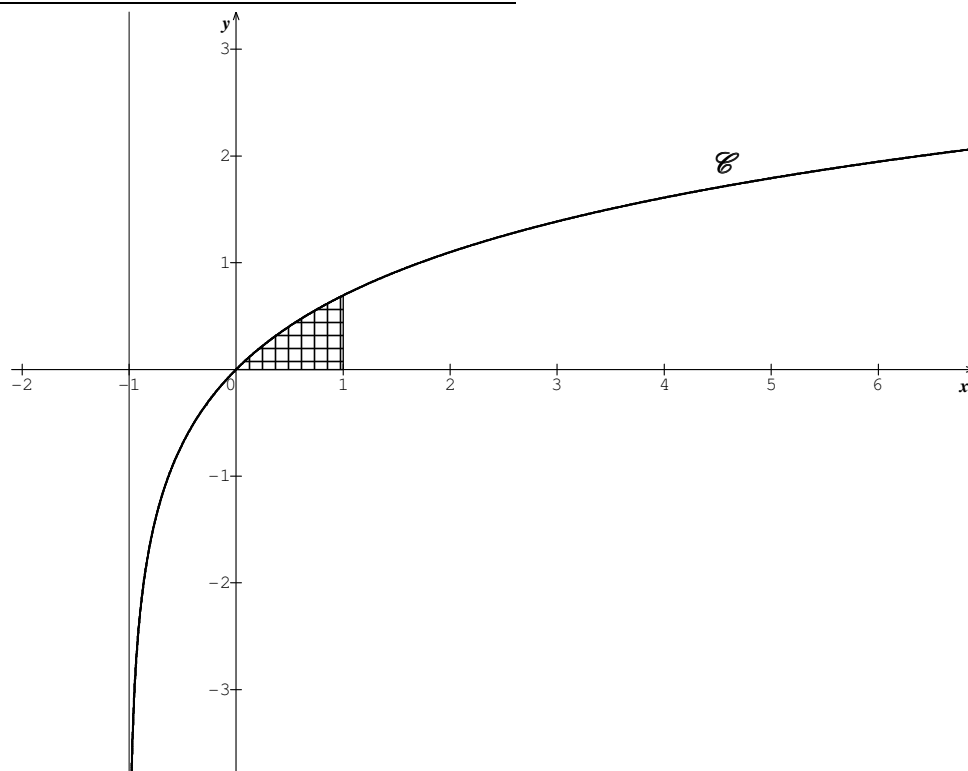
$h$  est dérivable sur  $Dh$  comme composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in Dh, h'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$\forall x \in Dh, 1+x > 0$  et  $1 > 0$  donc  $h'(x) > 0$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-1$      | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | $+$       |
| $h(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

8- Tracer une allure de courbe de la fonction  $h$



9- On note  $\mathcal{A}$ , l'aire en u.a, délimité par la courbe représentative de  $h$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ . Montrer que  $\frac{1}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$

si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h(0) \leq h(x) \leq h(1)$  car  $f$  est croissante sur  $[0,1]$  d'après la question 7

Or  $h(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$  donc si  $x \in [0,1]$  alors  $h(x) \geq 0$

donc  $\mathcal{E}$  est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire demandée, hachurée sur le graphique, est

donnée ; en ua , par  $\int_0^1 h(x) dx$

de plus  $\forall x \in [0,1]$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$  d'après la question 4

d'après la positivité de l'intégrale et  $0 \leq 1$  on a :  $\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \leq \int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x dx$

d'où  $\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq \mathcal{A} \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 0 \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2} - 0$$

$$\frac{2}{6} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$$

Conclusion :  $\frac{1}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$

**10- Calculer explicitement  $\mathcal{A}$  et vérifier l'encadrement de la question 9**

Pour calculer explicitement cette intégrale nous allons faire une intégration par partie doublement astucieuse

Pour tout réel  $x \in [0,1]$ ,  $h$  est continue car dérivable donc admet des primitives .

On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(1+x) & u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x+1 \end{array}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= \left[ (x+1) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dx \\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \left[ x \right]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - (1-0) = 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathcal{A} = 2\ln(2) - 1$  et comme  $\ln(2) \approx 0,7$  donc  $\mathcal{A} \approx 0,4$  et par suite on a bien  $\frac{1}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$

**Exercice 2 :**

**Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles**

Une urne contient quinze boules indiscernables au toucher dont une noire, cinq blanches et neuf rouges. On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

**1-**  $X$  est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage,

**a) Donner la loi de probabilité de  $X$ .**

$$\Omega = \{ \{ b_1, b_2, b_3 \} \mid \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket b_i \in \{ 15 \text{ boules} \} \}$$

$$|\Omega| = \binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 7 \times 13$$

Il y a équiprobabilité car le tirage se fait au hasard

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$$

♦ Le joueur tire 0 boule blanche donc tire 3 boules parmi les 10 qui ne sont pas blanches sans ordre ni remise soit  $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 3 \times 8$  possibilités donc  $P(X=0) = \frac{5 \times 3 \times 8}{5 \times 7 \times 13} = \frac{24}{91}$

♦ Le joueur tire 1 boule blanche donc tire 1 boule blanche parmi les 5 et 2 parmi les 10 qui ne sont pas blanches sans ordre ni remise soit  $\binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 5 \times \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 5 \times 5 \times 9$  possibilités donc

$$P(X=1) = \frac{5 \times 5 \times 9}{5 \times 7 \times 13} = \frac{45}{91}$$

♦ Le joueur tire 2 boules blanches donc tire 2 boules blanches parmi les 5 et 1 parmi les 10 qui ne sont pas blanches sans ordre ni remise soit  $\binom{5}{2} \times \binom{10}{1} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 10 = 5 \times 2 \times 10$  possibilités donc

$$P(X=2) = \frac{5 \times 2 \times 10}{5 \times 7 \times 13} = \frac{20}{91}$$

- ♦ Le joueur tire 3 boules blanches donc tire 3 boules blanches parmi les 5 sans ordre ni remise soit  $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 5 \times 2$  possibilités donc  $P(X=3) = \frac{5 \times 2}{5 \times 7 \times 13} = \frac{2}{91}$

|           |                 |                 |                 |                |                     |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------------|
| $x_i$     | 0               | 1               | 2               | 3              | total               |
| $p_i$     | $\frac{24}{91}$ | $\frac{45}{91}$ | $\frac{20}{91}$ | $\frac{2}{91}$ | 1                   |
| $x_i p_i$ | 0               | $\frac{45}{91}$ | $\frac{40}{91}$ | $\frac{6}{91}$ | $\frac{91}{91} = 1$ |

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

$$E(X) = 1$$

**donc en moyenne le joueur tire une boule rouge parmi les trois boules tirées**

c) Donner la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$ . (On ne demande pas de la représenter)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$$

$$\text{si } x < 0 \text{ alors } F(x) = 0$$

$$\text{si } 0 \leq x < 1 \text{ alors } F(x) = P(X=0) = \frac{24}{91}$$

$$\text{si } 1 \leq x < 2 \text{ alors } F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{24}{91} + \frac{45}{91} = \frac{69}{91}$$

$$\text{si } 2 \leq x < 3 \text{ alors } F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{24}{91} + \frac{45}{91} + \frac{20}{91} = \frac{89}{91}$$

$$\text{si } 3 \leq x \text{ alors } F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{24}{91} + \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = 1$$

2- a) Calculer la probabilité des évènements suivants :

$E$  : « parmi les trois boules du tirage figurent la noire et au moins une rouge ».

$F$  : « le tirage est tricolore ».

Le joueur tire la boule noire et au moins une rouge donc  $1N1R1B$  ou  $1N2R$

□ Soit il tire la noire et une rouge parmi les 9 boules rouges et une blanche parmi les 5 boules

blanches sans ordre ni remise soit  $\binom{1}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{5}{1} = 1 \times 9 \times 5 = 45$  possibilités

□ Soit il tire la noire et deux boules rouges parmi les 9 boules rouges sans ordre ni remise soit

$$\binom{1}{1} \times \binom{9}{2} = 1 \times \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 9 \times 4 = 36 \text{ possibilités}$$

$$\text{Donc } p(E) = \frac{45 + 36}{5 \times 7 \times 13} = \frac{81}{455}$$

Le joueur effectue un tirage tricolore donc  $1N$  et  $1R$  et  $1B$

Il tire la noire et une rouge parmi les 9 boules rouges et une blanche parmi les 5 boules blanches sans

ordre ni remise soit  $\binom{1}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{5}{1} = 1 \times 9 \times 5 = 45$  possibilités

$$\text{Donc } p(F) = \frac{45}{5 \times 7 \times 13} = \frac{9}{91}$$

- b) Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore sachant qu'y figurent la boule noire et au moins une boule rouge

$$P(E) = \frac{81}{455} \neq 0 \text{ donc } p_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(F)}{P(E)} = \frac{\frac{9}{91}}{\frac{81}{5 \times 91}} = \frac{9}{91} \times \frac{5 \times 91}{81} = \frac{5}{9}$$

$E \cap F$  revient à effectuer un tirage tricolore comportant la noire et au moins une rouge donc effectuer un tirage tricolore et par suite  $E \cap F = F$  ( car  $F \subset E$  ) .

**Conclusion:** la probabilité que le tirage soit tricolore sachant qu'y figurent la boule noire et au moins une boule rouge est de  $\frac{5}{9}$