

CORRECTION DU DEVOIR N°03

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 1]$ par : $f(x) = (5x-2)e^x - 3x - 2$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur (Ox) et 1 cm sur (Oy).

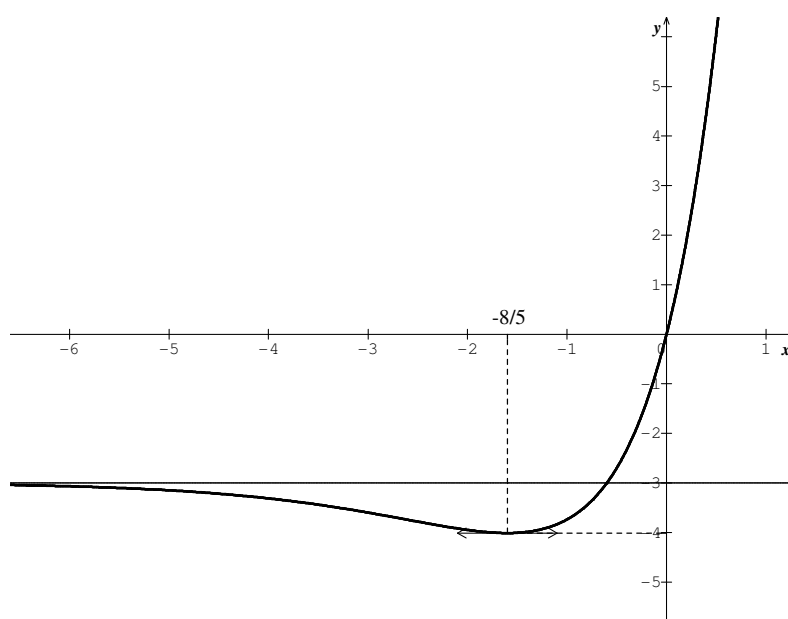
$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans ce repère.

Le but de ce problème est l'étude de f et le calcul d'une aire liée à f .

PARTIE A: Étude graphique d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par $g(x) = (5x+3)e^x - 3$

et représentée ci-dessous par la courbe Γ



Utiliser le graphique pour :

1- Donner le signe de $g(x)$.

x	$-\infty$	0	1
$g(x)$	-	0	+

2- Donner la limite de g lorsque x tend vers $-\infty$ sachant que la droite d'équation $y = -3$ est une asymptote à la courbe.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$$

3- Construire le tableau de variation de g

x	$-\infty$	$-8/5$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-3	-4	$8e-3$

en 1 on a $g(1) = (5+3)e^1 - 3 = 8e - 3$

Remarque : 1 n'est pas une valeur interdite donc pas de limite

PARTIE B: Étude de f

1- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

$$Df =]-\infty; 1]$$

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f'(x) = 5e^x + (5x-2)e^x - 3 = e^x(5+5x-3) - 3 = (5x+2)e^x - 3 = g(x)$$

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	-	0	+

2- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et dresser le tableau de variation de f .

Pour enlever la forme indéterminée, je développe

$$f(x) = 5xe^x - 2e^x + (-3x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 5xe^x = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x-2) = +\infty \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question 3

d'où le tableau de variations:

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-4	$f(1)$

$$f(0) = (5 \times 0 - 2)e^0 - 3 \times 0 - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$f(1) = (5 \times 1 - 2)e^1 - 3 \times 1 - 2 = 3e - 5$$

3- Montrer que la droite D d'équation $y = -3x - 2$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque x tend vers

$$-\infty$$

$$f(x) - y_D = (5x-2)e^x = 5xe^x - 2e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_D) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 5xe^x = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \end{cases}$$

Conclusion : la droite D d'équation $y = -3x - 2$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$

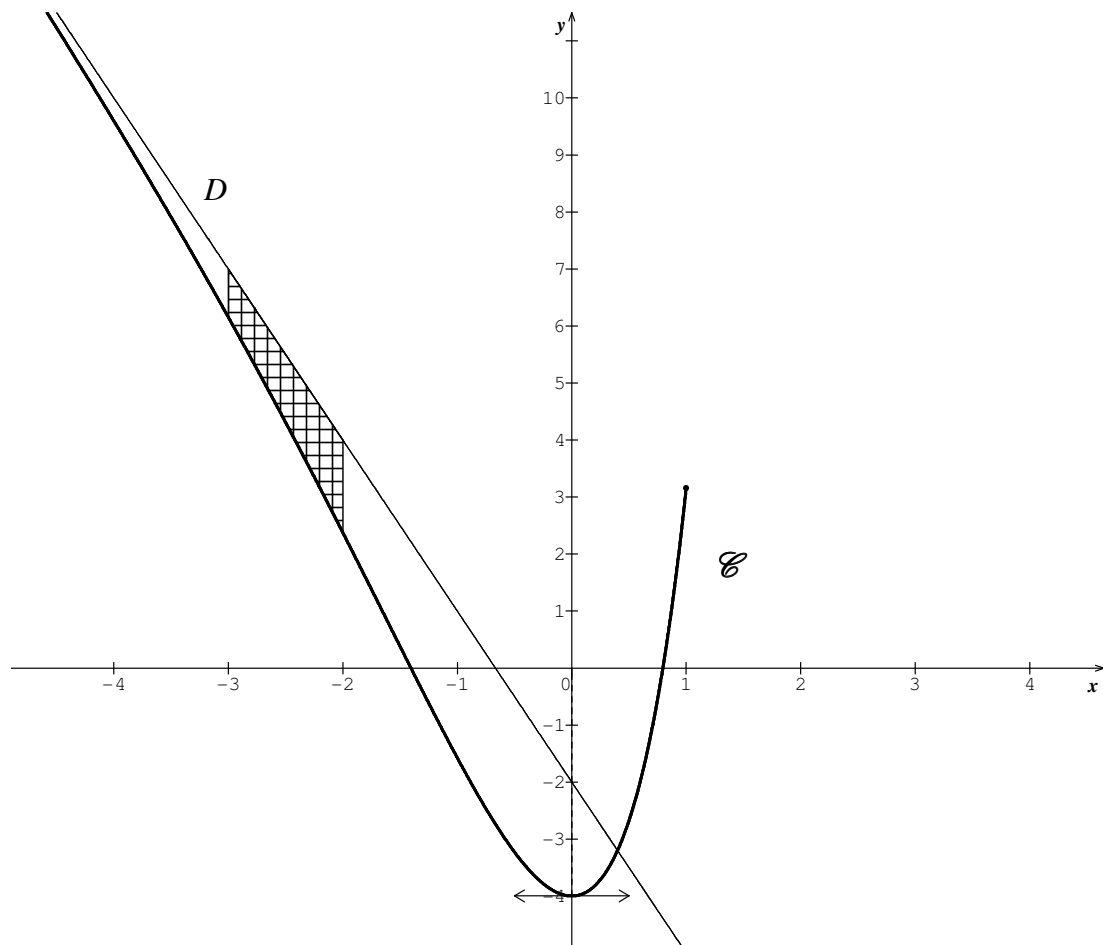
4- Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de D .

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = (5x-2)e^x$

or $\forall x \in Df, e^x > 0$ donc le signe de $f(x) - y_D$ dépend de $5x-2$

x	$-\infty$	$2/5$	1
$f(x) - y_D$	-	0	+
position	$\mathcal{C}$ est en dessous de D	$\mathcal{C}$ coupe D en $(2/5; -16/5)$	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D

5- Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D et la courbe $\mathcal{C}$.



PARTIE C : Calcul d'aire

1- Calculer l'intégrale : $I = \int_{-3}^{-2} (5x-2)e^x dx$

Pour tout réel $x \in [-3, -2]$, $x \mapsto (5x-2)e^x$ est continue comme produit de fonctions continues donc admet des primitives.

On pose

$$u(x) = 5x - 2$$

$$v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = 5$$

$$v(x) = e^x$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[-3, -2]$

La formule d'intégration par parties donne :

$$I = \left[(5x-2)e^x \right]_{-3}^{-2} - \int_{-3}^{-2} 5e^x dx$$

$$I = -12e^{-2} - (-17e^{-3}) - \left[5e^x \right]_{-3}^{-2}$$

$$I = -12e^{-2} + 17e^{-3} - (5e^{-2} - 5e^{-3})$$

$$I = -17e^{-2} + 22e^{-3}$$

Conclusion : $I = -17e^{-2} + 22e^{-3}$

2- En déduire l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine limité par la courbe, la droite D et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$.

D'après la question B4, $\mathcal{E}$ est en dessous de D sur $[-3, -2]$ donc l'adonc l'aire demandée, hachurée sur le graphique, est donnée ; **en ua**, par $\int_{-3}^{-2} (y_D - f(x)) dx = \int_{-3}^{-2} -(5x-2)e^x dx = -I$

$$\mathcal{A} = -I = -(-17e^{-2} + 22e^{-3}) = 17e^{-2} - 22e^{-3} \text{ ua}$$

or $1 \text{ ua} = 2 \times 1 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$

Conclusion : L'aire, en cm^2 , de ce domaine plan est $\mathcal{A} = 2(17e^{-2} - 22e^{-3}) = 34e^{-2} - 44e^{-3} \text{ cm}^2$

Exercice 2 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

1- Calculer $P_{J_1}(B)$, $P_{J_2}(B)$. et montrer que $P_{J_3}(B) = \frac{1}{30}$ et $P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$

$P_{J_1}(B)$ est la probabilité de tirer que des blanches dans U_2 sachant que l'on a tiré le jeton portant le numéro 1 autrement dit c'est la probabilité de tirer 1 boule blanche parmi 4 sachant que l'on tire qu'une seule boule de l'urne 2

$$\Omega_1 = \{10 \text{ boules dans l'urne 2}\}$$

$$|\Omega_1| = 10$$

Il y a équiprobabilité

$$\text{Donc } P_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$P_{J_2}(B)$ est la probabilité de tirer que des blanches dans U_2 sachant que l'on a tiré le jeton portant le numéro 2 autrement dit c'est la probabilité de tirer 2 boules blanches simultanément parmi 4 sachant que l'on tire 2 boules de l'urne 2 simultanément

$$\Omega_2 = \{ \{b_1, b_2\}, \forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \quad b_i \in \{10 \text{ boules de } U_2\} \}$$

$$|\Omega_2| = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 5 \times 9$$

Il y a équiprobabilité

$$\text{Donc } P_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \times 3}{9 \times 5} = \frac{2}{15} \quad \text{car } \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 2 \times 3$$

$P_{J_3}(B)$ est la probabilité de tirer que des blanches dans U_2 sachant que l'on a tiré le jeton portant le numéro 3 autrement dit c'est la probabilité de tirer 3 boules blanches simultanément parmi 4 sachant que l'on tire 3 boules de l'urne 2 simultanément

$$\Omega_3 = \{ \{ b_1, b_2, b_3 \}, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad b_i \in \{ 10 \text{ boules de } U_2 \} \}$$

$$|\Omega_3| = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 3 \times 8$$

Il y a équiprobabilité

$$\text{Donc } P_{J_3}(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{5 \times 3 \times 8} = \frac{1}{5 \times 3 \times 2} = \frac{1}{30}$$

$P_{J_4}(B)$ est la probabilité de tirer que des blanches dans U_2 sachant que l'on a tiré le jeton portant le numéro 4 autrement dit c'est la probabilité de tirer 4 boules blanches simultanément parmi 4 sachant que l'on tire 4 boules de l'urne 2 simultanément

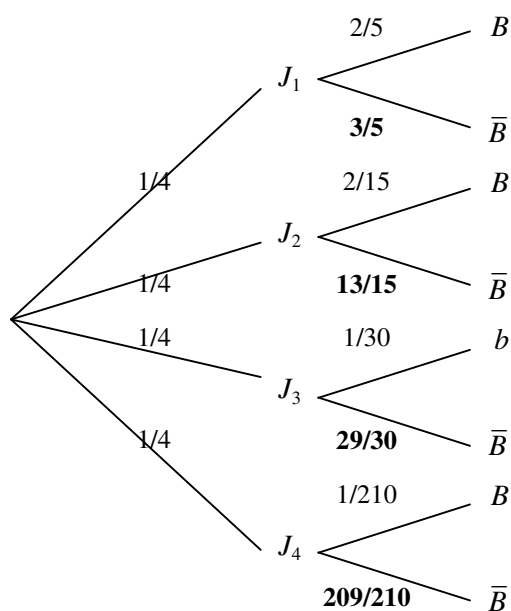
$$\Omega_4 = \{ \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}, \forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \quad b_i \in \{ 10 \text{ boules de } U_2 \} \}$$

$$|\Omega_4| = \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7$$

Il y a équiprobabilité

$$\text{Donc } P_{J_4}(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{10 \times 3 \times 7} = \frac{1}{210}$$

2- Montrer que $P(B)$, probabilité de l'évènement B , vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.



J_1, J_2, J_3 et J_4 forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap J_1) + P(B \cap J_2) + P(B \cap J_3) + P(B \cap J_4) \\ &= P(J_1)P_{J_1}(B) + P(J_2)P_{J_2}(B) + P(J_3)P_{J_3}(B) + P(J_4)P_{J_4}(B) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{30} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{210} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{84+28+7+1}{210} = \frac{1}{4} \times \frac{120}{210} = \frac{4 \times 3 \times 10}{4 \times 3 \times 7 \times 10} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité de B vaut $\frac{1}{7}$

3- On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

$$P(B) = \frac{1}{7} \neq 0 \text{ donc } P_B(J_3) = \frac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{120} \times 7 = \frac{7}{120}$$

Conclusion : la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 sachant que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches est $\frac{7}{120}$

4- On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

L'expérience jouer à ce jeu a deux issues :

- ♦ le succès : l'événement B de probabilité $\frac{1}{7}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

L'expérience se répète 10 fois de **manière identique et indépendante**.

On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 5 expériences.

Conclusion :

N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{7}\right)$
 $N(\Omega) = \llbracket 0 ; 10 \rrbracket$
 $\forall k \in \llbracket 0 ; 10 \rrbracket, P(N = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{7}\right)^k \left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}$

b) Calculer la probabilité de l'événement $(N=1)$.

$$P(N=1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{7}\right)^1 \left(\frac{6}{7}\right)^{10-1} = 10 \frac{1}{7} \left(\frac{6}{7}\right)^9$$

c) Donner $E(N)$ et $V(N)$

$$E(N) = np = 10 \times \frac{1}{7} = \frac{10}{7} \qquad V(N) = npq = \frac{10}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{60}{49}$$