

CORRECTION DU DEVOIR N°04

Exercice 1 : ESC 2009

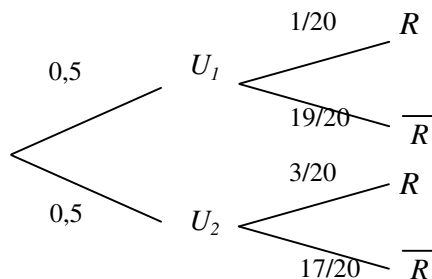
On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 20 boules dont une rouge et 19 blanches. L'urne $\mathcal{U}_2$ contient 20 boules dont 3 rouges et 17 blanches.

On désigne par "partie" le protocole suivant: On choisit une urne de manière équiprobable, puis on tire une boule de cette urne et on note sa couleur, enfin on remet la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

1- Ici on effectue une seule partie et on s'intéresse à l'évènement R : " la boule tirée est rouge" .

a) Montrer que $P(R) = \frac{1}{10}$

On note U_k l'évènement " la boule tirée provient de l'urne $\mathcal{U}_k$ " pour $k \in \{1; 2\}$
on a donc l'arbre pondéré suivant :



U_1 et U_2 forment un système complet d'évènement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) \\ &= P(U_1)P_{U_1}(R) + P(U_2)P_{U_2}(R) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} + \frac{3}{20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{20} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(R) = \frac{1}{10}$

b) Supposons avoir tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathcal{U}_1$?

$$P(R) \neq 0 \text{ donc } P_R(U_1) = \frac{P(R \cap U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{40} \times 10 = \frac{1}{4}$$

Conclusion : Supposons avoir tiré une boule rouge. alors la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathcal{U}_1$ est $\frac{1}{4}$

2- Dans cette question, le joueur effectue non pas une mais 40 parties.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il a obtenu la couleur rouge au cours de ces 40 parties.

a) Déterminer la loi de X . On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

L'épreuve consiste à tirer une boule. Elle a deux issues :

♦ le succès : "le joueur obtient une boule rouge" de probabilité $\frac{1}{10}$

♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

L'expérience se répète 40 fois de **manière identique et indépendante**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 40 expériences.

Conclusion :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(40, \frac{1}{10}\right)$

$X(\Omega) = \llbracket 0 ; 40 \rrbracket$

$\forall k \in \llbracket 0 ; 40 \rrbracket, p(X=k) = \binom{40}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{40-k}$

b) En moyenne, combien de fois le joueur obtiendra-t-il la couleur rouge en 40 parties ?

$$E(X) = np = 40 \times \frac{1}{10} = 4$$

Conclusion : En moyenne, le joueur obtiendra 4 fois la couleur rouge en 40 parties

c) On considère que l'on peut approcher X par une variable Z qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Justifier que le paramètre de cette loi est $\lambda=4$. En utilisant cette approximation et en vous aidant de la table fournie, déterminer une valeur approchée de la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties.

Lorsqu'on approche une loi binomiale par une loi de Poisson on doit avoir la même espérance.

$E(X)=4$ et $E(Z)=\lambda$ donc $\lambda=4$ et par suite Z qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$.

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=1)) = 1 - (0,018 + 0,073) = 1 - 0,091 = 0,909$$

Conclusion : une valeur approchée de la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties est 0,909

3- Dans cette question le joueur répète les parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne la couleur rouge pour la 1^{ère} fois.

Soit Y le rang de la partie où il obtient pour la 1^{ère} fois la couleur rouge.

a) Déterminer la loi de Y . On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

L'épreuve consiste à tirer une boule. Elle a deux issues :

♦ le succès : "le joueur obtient une boule rouge" de probabilité $\frac{1}{10}$

♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

L'expérience se répète de **manière identique et indépendante** jusqu'à l'obtention du premier succès
Soit Y la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès

Conclusion :

Y suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$
 $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, p(Z=k) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

b) Préciser son espérance et sa variance.

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$$

$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{9}{10} \times 10^2 = 90$$

Table de la loi de Poisson de paramètre 4 :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Z=k)$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	0,104

Exercice 2 : ESC 2018

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 1 + x$

1- a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$

$Dg = \mathbb{R}$

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

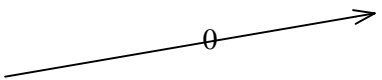
$\forall x \in Dg, g'(x) = e^x + 1$

$\forall x \in Dg, e^x > 0$ et $1 > 0$ donc $g'(x) > 0$ et par suite g est croissante

Conclusion : g est croissante sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
 $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$

J'ai dressé un tableau de variation de g pour mieux visualiser.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$			

Conclusion :

$\forall x \leq 0, g(x) \leq g(0)$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ on a : $\forall x \leq 0, g(x) \leq 0$

$\forall x \geq 0, g(x) \geq g(0)$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ on a : $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$

d'où signe de $g(x)$: 

c) Calculer $\int_0^1 g(x)dx$ puis interpréter ce résultat.

g est continue sur $[0,1]$ car dérivable donc admet des primitives.

$$\int_0^1 g(x)dx = \left[e^x - x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - 1 + \frac{1}{2} - (e^0 - 0 + 0) = e - 1 + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

Conclusion : $\int_0^1 g(x)dx = e - \frac{3}{2}$.

$\forall x \in [0,1], g(x) > 0$ d'après la question 1b. donc $\int_0^1 g(x)dx$ représente l'aire, en unité d'aire du domaine du plan limité par les droites d'équations $x=0, x=1$, la courbe et l'axe des abscisses.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

2- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$Df = \mathbb{R}$ car une exponentielle ne s'annule jamais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question suivante.

b) Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

Conclusion : la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = \frac{-x}{e^x}$

Or $\forall x \in Df, e^x > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $-x$: $\xrightarrow[0]{+ \quad \oplus \quad -}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$	0	$-$
position	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D	 coupe D en $(0; 1)$	$\mathcal{C}$ est en dessous de D

Conclusion : la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x} = x + 1 - xe^{-x}$$

En remplaçant x par $-\infty$ on trouve une forme indéterminée du type $(-\infty) + (+\infty)$ aussi il faut factoriser $f(x)$ par le terme prépondérant ici $-xe^{-x}$

$$f(x) = -xe^{-x} \left(\frac{x}{-xe^{-x}} + \frac{1}{-xe^{-x}} + 1 \right) = -xe^{-x} \left(-e^x - \frac{e^x}{x} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \end{cases}$$

Étude des branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} \left(-e^x - \frac{e^x}{x} + 1 \right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-e^x - \frac{e^x}{x} + 1 \right) = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

3- a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in Df, f'(x) = 1 - \frac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + xe^x}{(e^x)^2} = (e^x) \times \frac{e^x - 1 + x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

Conclusion : $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$

b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2.

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

$\forall x \in Df, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ (fait à la question 1b)

d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = 0 + 1 - 0 = 1$$

4- Montrer que la dérivée seconde de f vérifie pour tout réel x la relation : $f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$

Étudier la convexité de f .

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e^x}$$

f' est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall x \in Df, f''(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - e^x(e^x - 1 + x)}{(e^x)^2} = \frac{(e^x + 1) - (e^x - 1 + x)}{e^x} = \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{2 - x}{e^x}$$

$\forall x \in Df, e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $2-x$

d'où le signe de $2-x$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} + & \oplus & - \\ \hline & 2 & \end{array} \end{array}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$
convexité	f est convexe	point d'inflexion $(2, f(2))$	f est concave

$$f(2) = 2 + 1 - \frac{2}{e^2} = 3 - \frac{2}{e^2} = 3 - 2e^{-2} \text{ et } e^{-2} = (e^{-1})^2 \text{ donc } f(2) \approx 3 - 2(0,4)^2 \approx 2,7.$$

5- Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et D .

