

CORRECTION DU DEVOIR N°05

Exercice 1 :

PARTIE I: Un jeu en ligne.

La société Lehasard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H , V , D , et N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement » .
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement » .
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale » .
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés » .

1- Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.

Déterminer les positionnements revient à déterminer le nombre de possibilités de choisir 3 cases parmi 9 sans ordre ni remise soit $\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 12 \times 7 = 84$

Conclusion : il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.

2- Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H , V , D .

$\Omega = \{ \{j_1, j_2, j_3\} \mid \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, j_i \in \{9 \text{ cases}\} \}$

$|\Omega| = 84$ d'après la question précédente.

Il y a équiprobabilité

Il y a 3 lignes, donc $|H| = 3$ et $P(H) = \frac{3}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{28}$

Il y a 3 colonnes, donc $|V| = 3$ et $P(V) = \frac{3}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{28}$

Il y a 2 diagonales, donc $|D| = 2$ et $P(D) = \frac{2}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{42}$

Conclusion : $P(H) = P(V) = \frac{1}{28}$ et $P(D) = \frac{1}{42}$

3- En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à : $P(N) = \frac{19}{21}$ On donne $\frac{19}{21} \approx 0,9048$

L'événement N est les 3 jetons ne sont pas alignés donc ni en diagonale, ni verticale ni horizontale et par suite $N = \bar{H} \cap \bar{V} \cap \bar{D}$

$$\begin{aligned}
P(N) &= 1 - P(\overline{H \cap V \cap D}) \\
&= 1 - P(H \cup V \cup D) \\
&= 1 - (P(H) + P(V) + P(D)) \text{ car } H, V \text{ et } D \text{ sont disjoints} \\
&= 1 - \left(\frac{3}{84} + \frac{3}{84} + \frac{2}{84} \right) \\
&= 1 - \frac{8}{84} \\
&= \frac{76}{84} \\
&= \frac{4 \times 19}{4 \times 21} \\
&= \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(N) = \frac{19}{21}$

4- La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance.

Déterminer la loi de Z_i et calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$.

Z_i est le gain de $i^{\text{ème}}$ partie de la société donc quand le joueur gagne 18 euros, la société perd 18 euros et quand le joueur perd 2 euros, la société gagne 2 euros

$$Z_i(\omega) = \{-18, 2\}.$$

Comme le joueur gagne lorsque les 3 jetons sont alignés (événement $\bar{N}$) et perd lorsque les jetons ne sont pas alignés (événement N), on obtient

$$P(Z_i = -18) = P(\bar{N}) = \frac{2}{21}$$

$$P(Z_i = 2) = P(N) = \frac{19}{21}$$

d'où la loi de Z_i

z_i	-18	2	total
p_i	$\frac{2}{21}$	$\frac{19}{21}$	1
$z_i p_i$	$-\frac{36}{21}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{2}{21}$

$$E(Z_i) = \sum z_i p_i = \frac{2}{21} \approx 1 - 0,9048 \approx 0,0952$$

b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

on a 10 000 relances donc $Z = 10000Z_i$

et $E(Z) = E(10000Z_i)$

$$= 10000E(Z_i) \text{ car } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\approx 10000 \times 0,0952 \approx 952$$

Conclusion : La société peut espérer un gain journalier de 952 €

PARTIE II: Cas de joueurs invétérés.

1- Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.

L'épreuve consiste à jouer une partie. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "le joueur gagne" de probabilité $\frac{2}{21}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$

L'expérience se répète 100 fois de **manière identique et indépendante**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 100 expériences.

Conclusion :

$$\begin{aligned} X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right) \\ X(\Omega) = \llbracket 0 ; 100 \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0 ; 100 \rrbracket, P(X = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{2}{21}\right)^k \left(\frac{19}{21}\right)^{100-k} \end{aligned}$$

b) Indiquer l'espérance et la variance de X .

$$E(X) = np = 100 \times \frac{2}{21} = \frac{200}{21}$$

$$V(X) = npq = \frac{200}{21} \times \frac{19}{21} = \frac{3800}{441}$$

c) Exprimer G le gain du joueur en fonction de X .

Le joueur gagne X fois et joue 100 fois donc perd $100 - X$ fois

gain du joueur = $18 \times (\text{Nombre de parties gagnées}) - 2 \times (\text{Nombre de parties perdues})$

donc $G = 18X - 2(100 - X) = 18X - 200 + 2X = 20X - 200$

Conclusion : $G = 20X - 200$

2- Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \approx -0,1$)

L'épreuve consiste à jouer une partie. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "le joueur gagne" de probabilité $\frac{2}{21}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$

L'expérience se répète n fois de **manière identique et indépendante**.

On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n expériences.

$$\begin{aligned} X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{21}\right) \\ X_n(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0 ; 100 \rrbracket, P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{21}\right)^k \left(\frac{19}{21}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Je dois déterminer n tel que $1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \text{ car } 0 < \frac{19}{21} < 1 \text{ donc } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0$$

$$\text{Or } -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \approx -\frac{0,7}{-0,1} \approx 7$$

Conclusion : pour que la probabilité que le joueur gagne au moins une partie soit supérieure ou égale à 50%, il faut que le joueur joue au moins 7 parties

3- Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.

a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .

L'épreuve consiste à jouer une partie. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "le joueur gagne" de probabilité $\frac{2}{21}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$

L'expérience se répète de **manière identique et indépendante** jusqu'à l'obtention du premier succès
Soit Y la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès

Conclusion :

Y suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{2}{21}\right)$

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p(Y=k) = \left(\frac{2}{21}\right) \left(\frac{19}{21}\right)^{k-1}$$

b) Indiquer l'espérance et la variance de Y .

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{21}{2}$$

$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{19}{21}}{\left(\frac{2}{21}\right)^2} = \frac{19}{21} \times \frac{21^2}{2^2} = \frac{19 \times 21}{4} = \frac{399}{4}$$

- c) Pour tout entier naturel k , montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule : $p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$

$$\begin{aligned}
 p_k &= P(Y \leq k) = \sum_{n=1}^k P(Y=n) \\
 &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{21}\right) \left(\frac{19}{21}\right)^{n-1} \\
 &= \frac{2}{21} \times \left(\frac{19}{21}\right)^{-1} \sum_{n=1}^k \left(\frac{19}{21}\right)^n \\
 &= \frac{2}{21} \times \frac{21}{19} \sum_{n=1}^k \left(\frac{19}{21}\right)^n \\
 &= \frac{2}{19} \sum_{n=1}^k \left(\frac{19}{21}\right)^n
 \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des terme d'une suite géométrique de raison $\frac{19}{21}$ d'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^k \left(\frac{19}{21}\right)^n &= \left(\frac{19}{21}\right)^1 \times \frac{1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k}{1 - \frac{19}{21}} \quad \text{car } \frac{19}{21} \neq 1 \\
 &= \frac{19}{21} \frac{21}{2} \left(1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k\right) = \frac{19}{2} \left(1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k\right)
 \end{aligned}$$

Conclusion : $p_k = \frac{2}{19} \sum_{n=1}^k \left(\frac{19}{21}\right)^n = \frac{2}{19} \times \frac{19}{2} \left(1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k\right) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$

Exercice 2 :

1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

a) Vérifier que , pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 \forall x > 1, \quad \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} &= \frac{x(x-1) + x(x+1) - 2(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x^2 - x + x^2 + x - 2(x^2 - 1)}{2x(x^2 - 1)} \\
 &= \frac{2}{2x(x^2 - 1)} = g(x)
 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x}$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

$$\text{pour tout } x > 1, \quad g(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

g est continue sur $]1; +\infty[$ comme somme de fonctions continue donc admet des primitives

Conclusion : $\forall x \in]1; +\infty[, G(x) = \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x|$

2- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

f est continue sur $]1; +\infty[$ comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

Conclusion : $\forall x \in]1; +\infty[, F(x) = -\frac{1}{x^2-1}$

Remarque: $f(x) = 2x(x^2-1)^{-2}$ on reconnaît $u'u^\alpha$ avec $u(x) = x^2-1$ et $\alpha = -2$

3- En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln(x) dx$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$, avec p et q rationnels

$x \mapsto \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln(x)$ est continue sur $[2, 3]$ comme produit de fonctions continues donc admet des primitives.

On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= \frac{2x}{(x^2-1)^2} & v(x) &= -\frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[2, 3]$

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{-\ln(x)}{x^2-1} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{-1}{x(x^2-1)} dx \\ &= \frac{-\ln(3)}{8} + \frac{\ln(2)}{3} + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx \\ &= -\frac{1}{8} \ln(3) + \frac{1}{3} \ln(2) + \left[\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x| \right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{8} \ln(3) + \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(2) - \ln(3) - \left(\frac{1}{2} \ln(3) + 0 - \ln(2) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2} \right) \ln(3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} + 1 \right) \ln(2) \quad \text{car } \ln(4) = 2\ln(2) \\ &= -\frac{13}{8} \ln(3) + \frac{17}{6} \ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : $I = \frac{17}{6} \ln(2) - \frac{13}{8} \ln(3)$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.

1- Calculons les 4 premiers termes

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$u_2 = \frac{2}{2} u_1 = u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_4 = \frac{4}{6} u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

2- Écrire un script SCILAB qui demande la valeur de n et qui affiche la valeur de u_n .

□ Méthode 1 avec des matrices

```
n=input('n=')
u=zeros(1,n)
u(1)=1/2
for k=2:n
    u(k)=k/(2*(k-1))*u(k-1)
end
disp('u'+string(n)+'='+string(u(n)))
```

□ Méthode 2 sans des matrices

```
n=input('n=')
u=1/2
for k=2:n
    u=k/(2*(k-1))*u
end
disp('u'+string(n)+'='+string(u))
```

3- Montrons, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}_n$, « $u_n \geq 0$ »

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n , $n \geq 1$,

♦ *Initialisation*

$$u_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \geq 0 \text{ donc } u_1 \geq 0$$

Donc la propriété est vraie au 1^{er} rang

♦ *Hérédité*

On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n \geq 0$. Montrons la propriété au rang $n+1$

$$u_n \geq 0$$

$$\text{or si } n \geq 1 > 0 \text{ alors, } \frac{n+1}{2n} > 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \geq 0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n , $n \geq 1$.

Conclusion :

Donc pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

4- Montrons que la suite est décroissante (u_n) . Que peut-on en déduire ?

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n} u_n - u_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1 \right) u_n = \left(\frac{n+1-2n}{2n} \right) u_n = \frac{-n+1}{2n} u_n$$

or $n \geq 1$ donc $-n+1 \leq 0$ et $2n > 0$

De plus, la question 3) $u_n \geq 0$

Conclusion :

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ i.e (u_n) est décroissante.

De plus, (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

5- On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour $n > 0$

a) Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

Conclusion :

$$\forall n > 0, v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

b) Déterminons la limite de v_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

c) Écrivons l'expression de u_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n}{n} \text{ donc } u_n = n v_n$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n v_n = n \times \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$