

CORRECTION DU DEVOIR N°06

Exercice 1 :

1- On considère la fonction numérique g définie sur par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g et étudier la parité

g existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $Dg = \mathbb{R}_+^*$

b) Déterminer les limites aux bornes de Dg

□ **limite en $+\infty$**

Pour enlever la forme indéterminée en $+\infty$ je factorise par x^2

$$\forall x > 0, g(x) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln(x) \right) = -\infty \end{cases}$$

Pas d'études des branches infinies car pas de courbe demandée

□ **limite en 0^+**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0 \text{ (limite de référence)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2) = 1 \end{cases}$$

c) Dresser le tableau des variations de g .

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Dg, g'(x) = 2x - \left(2 \times 2x \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x} \right) = 2x - 4x \ln(x) - 2x = -4x \ln(x)$$

$\forall x \in Dg, x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-4\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
-4			
$\ln(x)$		0	+
$g'(x)$		0	-

d'où le tableau de variation de g

x	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		0		
$g(x)$	1	2		$-\infty$

$$g(1) = 1 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \ln(1) = 1 + 1 = 2$$

d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$

□ **Étude sur $]0; 1]$**

$\forall x \in]0; 1], g(x) \geq 1 > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; 1]$

□ **Étude sur $[1; +\infty[$**

g est continue sur $[1; +\infty[$ car dérivable

g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ d'après le tableau de variation

$g(1)=2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

donc g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $g([1; +\infty[) =]-\infty; 2]$

De plus $0 \in]-\infty; 2]$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

De plus $g(1)=2 > 0$ et $g(2)=1+4-24\ln(2)=5-8\ln(2) \approx -0,6 < 0$ car $\ln(2) \approx 0,7$

donc $\alpha \in]1; 2[$

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$

e) Écrire un programme Scilab qui affiche une valeur approchée de α à 10^{-2} près

Cette question attend l'algorithme de la dichotomie.

```
function y=g(x)
    y=1+x^2-2*x^2*log(x)
endfunction

a=1;
b=2;
while abs(b-a)>=0.01
    m=(a+b)/2
    if g(a)*g(m)<0 then b=m
        else a=m
    end
end
disp(a)
disp(b)
```

f) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variation

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

2- On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

f existe $\Leftrightarrow x > 0$ et $1+x^2 \neq 0$ (toujours vrai) donc $Df = \mathbb{R}_+^*$

b) Déterminer les limites aux bornes de Df

□ **limite en $+\infty$**

Pour enlever la forme indéterminée en $+\infty$ je factorise par x^2 au dénominateur pour faire apparaître une croissance comparée

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} = \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ (croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1 \end{cases}$$

La droite D d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

Étudier la position relative de D et $\mathcal{C}$ revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$

$\forall x \in Df, 1+x^2 > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_D$		0	+
position	$\mathcal{C}$ est en dessous de D	$\mathcal{C}$ coupe D en $(1, 0)$	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D

□ **limite en 0^+**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2) = 1 \end{cases}$$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

c) Calculer la dérivée de f .

f est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2 \ln(x)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

d) Dresser le tableau des variations de f .

$\forall x \in Df, x > 0$ et $(1+x^2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

d'où le tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

e) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2}$$

Il faut donc faire disparaître $\ln(\alpha)$ pour cela on revient à la définition de α

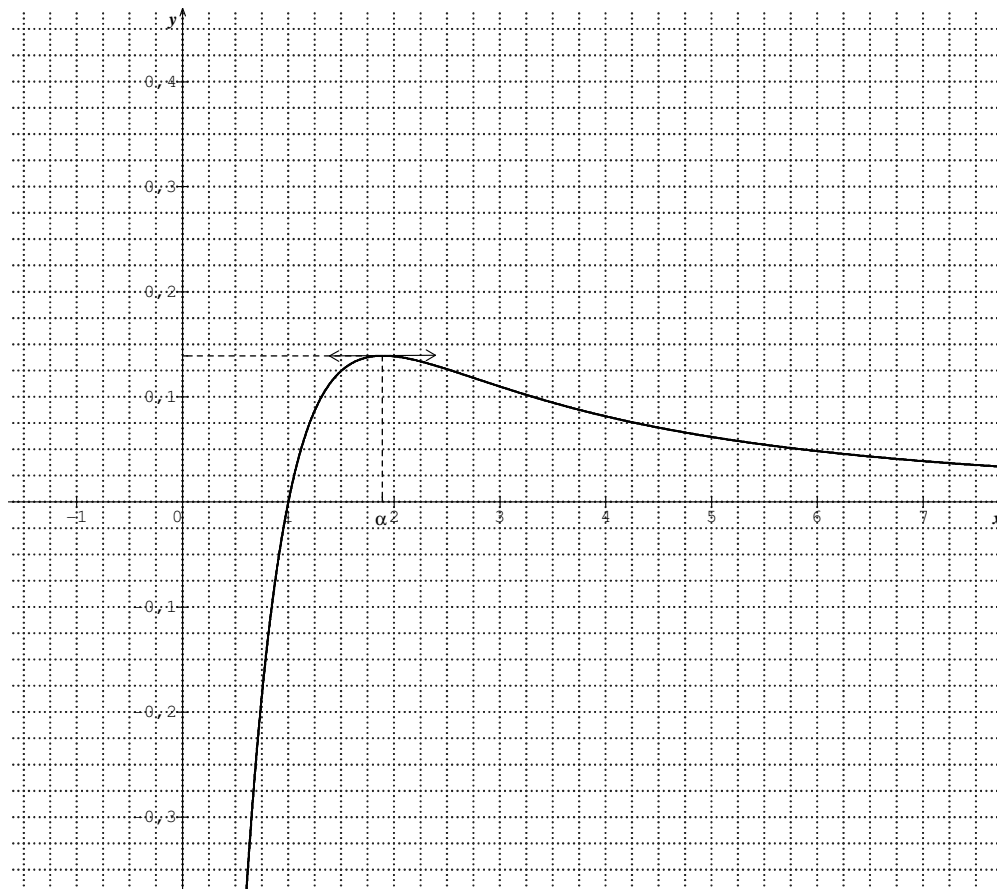
α est définie par $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln(\alpha) = 0$

et par suite $\ln(\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$ car $\alpha \neq 0$

$$\text{on remplace dans } f(\alpha) \text{ et il vient } f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2} \times \frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

Conclusion : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

3- Tracer la représentation graphique de $\mathcal{E}$. On donne $\alpha \approx 1,9$ et $f(\alpha) \approx 0,14$



Exercice 2 :

On pose $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$

1- Recopier et compléter le programme SCILAB suivant qui permet de demander n à l'utilisateur et qui calcule les n premiers termes de la suite (u_n)

```
n=input('n=')
u=1 //u1
for i=2:n // ne pas confondre n et i
    u=(u+8)/(2*u+1)
    disp('u'+string(i)+'=' +string(u))
end
```

2- Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $1 \leq u_n \leq 3$.

On pourra définir une fonction f par $f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$

On pose f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ sur $Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - 2 \times (x+8)}{(2x+1)^2} = -\frac{15}{(2x+1)^2}$

$f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$, « $1 \leq u_n \leq 3$ » pour tout entier naturel n

♦ *Initialisation*

$u_1 = 1$ donc $1 \leq u_1 \leq 3$ Donc la propriété est vérifiée au premier rang.

♦ *Hérédité*

On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est à dire $1 \leq u_n \leq 3$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$1 \leq u_n \leq 3$

$f(1) \geq f(u_n) \geq f(3)$ car f est décroissante sur $[1; 3] \subset \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

de plus $f(1) = \frac{9}{3} = 3$ et $f(3) = \frac{11}{7} \geq 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Alors $1 \leq f(3) \leq f(u_n) \leq f(1) \leq 3$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ donc la propriété est prouvée au rang $(n+1)$

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion :

Donc pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq 3$