

CORRECTION DU DEVOIR N°07

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. Étudions les variations de f .

f existe $\Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

f est dérivable sur $[0; 2] \subset Df$ comme quotient de fonction dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; 2]$

$$\forall x \in [0; 2], f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $[0; 2]$, d'où le tableau de variation

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1	$\frac{5}{3}$

$$f(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0 + 1} = 1 \text{ et } f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

2. Montrons que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

Si $1 \leq x \leq 2$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ car f est croissante sur $[0; 2]$

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3} \leq 2 \text{ car } f(2) = \frac{5}{3} \text{ et } f(1) = \frac{3}{2}$$

Conclusion : Si $x \in [1, 2]$ alors $f(x) \in [1, 2]$

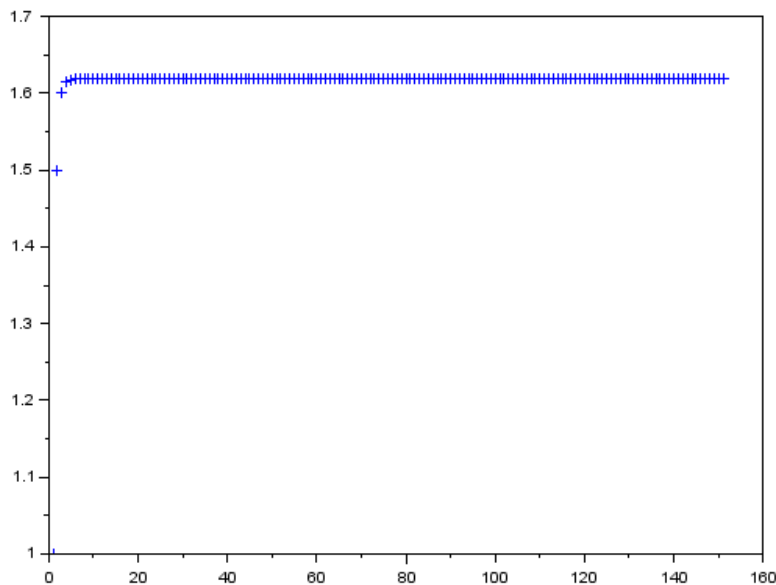
(u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

3- Compléter le programme scilab qui demande la valeur de n à l'opérateur puis qui permet de tracer les n termes de la suite.

```
function y=f(x)
    y=(2*x+1)/(x+1)
endfunction

n=input('n=')
u=zeros(1,n)
u(1)=1 //u1
for i=2:n
    u(i)=f(u(i-1))
end
plot(u, "+")
```

Voici le résultat du programme avec $n = 150$



- 3- À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ? (On ne demande pas le calcul de l'éventuelle limite).

D'après le graphique, je conjecture que (u_n) est croissante et convergente.

- 4- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

Soit $\mathcal{P}_n$, « $1 \leq u_n \leq 2$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

Pour $n=1$

$u_1=1$ et $1 \leq 1 \leq 2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $1 \leq u_n \leq 2$

Montrons la propriété au rang $n+1$

De $u_n \in [1 ; 2]$ et de la question 2, on a : $u_{n+1}=f(u_n) \in [1 ; 2]$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion : Pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$

- 5- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

Soit $\mathcal{Q}_n$, « $u_n \leq u_{n+1}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

$u_1=1$; $u_2=f(u_0)=f(1)=\frac{3}{2}$ et $u_1 \leq u_2$ donc $u_n \leq u_{n+1}$ donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n \leq u_{n+1}$

Montrons la propriété au rang $n+1$

♦ De $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$;

On a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car f est croissante sur $[1; 2]$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul

Conclusion : (u_n) est croissante.

6- Montrer que (u_n) est convergente et déterminer la limite.

(u_n) croissante et majorée par 2 donc (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de (u_n)

$$\text{on a aussi } u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

$$\text{de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2\ell + 1}{\ell + 1}$$

Or la limite d'une suite est unique donc $\ell = \frac{2\ell + 1}{\ell + 1}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 2$ on a : $1 \leq \ell \leq 2$

ℓ est solution de l'équation $x = \frac{2x+1}{x+1}$ et $1 \leq \ell \leq 2$

$$x = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)1 = 5$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in [1; 2]$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin [1; 2]$$

Conclusion : (u_n) est convergente et converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

$$\text{On note : } M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1- (a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1} .

Réolvons le système $PX=Y$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ x-y=b \\ x-z=c \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y+z=a-b & L_2 \leftarrow L_1-L_2 \\ y+2z=a-c & L_3 \leftarrow L_1-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y+z=a-b \\ -3z=-a-b+2c & L_3 \leftarrow L_2-2L_3 \end{cases}$$

Ce système triangulaire a tous les coefficients de la diagonale non nuls. Il est donc de Cramer et par suite P est inversible.

$$\text{De plus } \begin{cases} x = \frac{a+b+c}{3} \\ y = \frac{a-2b+c}{3} \\ z = \frac{a+b-2c}{3} \end{cases}$$

Conclusion :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées A, B et C.

On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

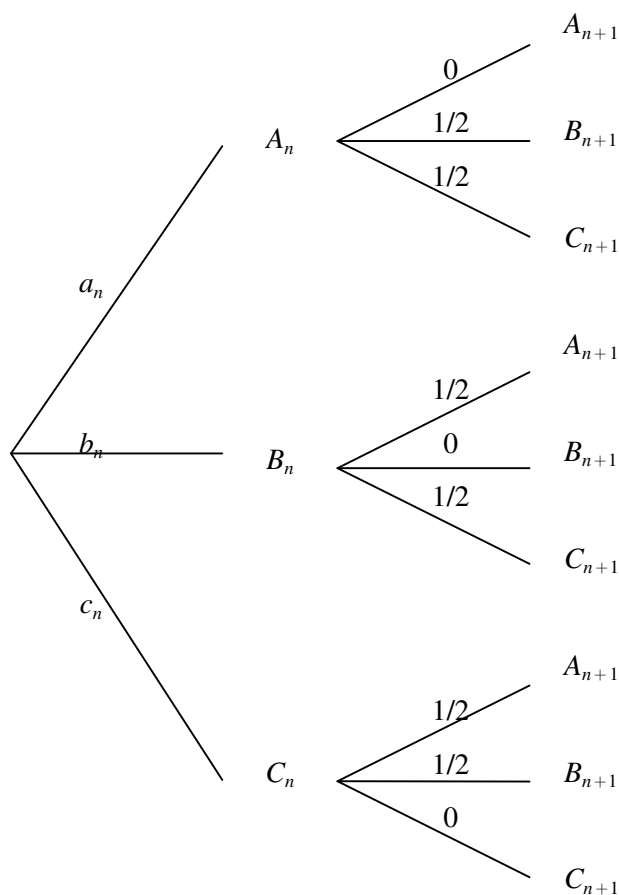
Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité B.

On notera A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement: " le client choisit l'activité A le jour n " (respectivement B, C) et on notera a_n (respectivement b_n , c_n) sa probabilité.

On définit également la matrice U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

2- (a) Par une formule des probabilités totales, montrer que :
pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = MU_n$

Établissons un arbre pondéré de la situation



Pour tout entier n non nul , A_n , B_n , C_n forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totale on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n \end{aligned}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n$$

$$\text{donc } U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } MU_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul , $U_{n+1} = MU_n$

(b) En utilisant la relation établie en 1.(b) , en déduire par récurrence que,

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sont } \mathcal{P}_n, \ll U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \gg$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul n ,

♦ *Initialisation :*

$n=1$,

$$\frac{1}{3}PD^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}PI \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De plus, le 1^{er} jour le client choisit l'activité B donc $a_1=0$, $b_1=1$ et $c_1=0$ et par suite $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= MU_n \\
&= PDP^{-1}U_n && \text{car } M = PDP^{-1} \\
&= PDP^{-1} \frac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{car } U_n = \frac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} PDP^{-1} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{car } P^{-1}P = I \text{ et } DD^{n-1} = D^n
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n : $U_n = \frac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3- En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$D^{n-1} = \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ est diagonale}$$

$$PD^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{par suite } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Conclusion} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$