

CORRECTION DU DEVOIR N°08

Exercice 1:

On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On considère également la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$

1. Inverse de P . Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .

Méthode 1: la plus simple

$1 \times 1 - (-1)1 = 1 + 1 = 2$ donc P est inversible

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -(-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Méthode 2: Pivot de Gauss pour info

Réolvons le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2y = a + b \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

Ce système triangulaire a tous les coefficients de la diagonale non nuls . Il est donc de Cramer et par suite P est inversible.

$$\text{De plus } \begin{cases} x + y = a \\ 2y = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-b}{2} \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Calcul de A^n . On pose $B = P^{-1}AP$

(a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n

B est diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(c) Démontrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, A^n = PB^nP^{-1}$ puis donner les quatre coefficients de la matrice A^n .

Soit $\mathcal{P}_n$, « $A^n = PB^nP^{-1}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation* :

Pour $n=0$ on a $PB^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité* :

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $A^n = PB^nP^{-1}$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PB^n P^{-1} A \\ &= PB^n P^{-1} P B P^{-1} \quad \text{car } A = P B P^{-1} \\ &= PB^n I B P^{-1} \\ &= PB^n B P^{-1} \\ &= PB^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}$

Remarque : $B = P^{-1}AP$

En multipliant par P à gauche il vient $PB = PP^{-1}AP$ soit $PB = AP$

En multipliant par P^{-1} à droite il vient $PBP^{-1} = APP^{-1}$ soit $PBP^{-1} = A$

De plus

$$PB^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$PB^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2^n}{2} & \frac{-1+2^n}{2} \\ \frac{-1+2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2^n}{2} & \frac{-1+2^n}{2} \\ \frac{-1+2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} \end{pmatrix}$

3. Convergence de la suite . $(u_n)_{n \geq 0}$

(a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.

Méthode 1 : On utilise l'application f définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

f existe si et seulement si $x+3 \neq 0$ si et seulement si $x \neq -3$

$Df = \mathbb{R} - \{-3\}$

f est dérivable sur chaque intervalle de Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur Df

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3(x+3) - 1(3x+1)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2}$$

$\forall x \in Df, 8 > 0$ et $(x+3)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et par suite f est strictement croissante.

Soit $\mathcal{P}_n$, « $u_n \geq 1$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

Pour $n=0$ $u_0=2$ et $2 \geq 1$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n \geq 1$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$u_n \geq 1$$

$f(u_n) \geq f(1)$ car f est croissante sur $] -3 ; +\infty[$

$$u_{n+1} \geq 1 \text{ car } f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(1) = \frac{3+1}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.

Méthode 2 : sans utiliser f

Soit $\mathcal{P}_n$, « $u_n \geq 1$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

Pour $n=0$ $u_0=2$ et $2 \geq 1$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n \geq 1$

Montrons la propriété au rang $n + 1$

Le but est de comparer u_{n+1} à 1 donc on étudie le signe de la différence

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1 = \frac{3u_n + 1 - u_n - 3}{u_n + 3} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 3} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 3}$$

or $u_n \geq 1$ d'où $u_n - 1 \geq 0$ et $u_n + 3 > 0$ donc $u_{n+1} - 1 \geq 0$ et par suite $u_{n+1} \geq 1$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

Méthode 1 : On utilise l'application f définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $u_n \geq u_{n+1}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ Initialisation :

Pour $n = 0$

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = f(u_0) = f(2) = \frac{6+1}{2+3} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Or } 2 = \frac{10}{5} > \frac{7}{5} \text{ donc } u_0 \geq u_1$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ Hérédité :

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n \geq u_{n+1}$

Montrons la propriété au rang $n + 1$

$$u_n \geq u_{n+1} \geq 1$$

$f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ car f est croissante sur $] -3 ; +\infty[$

$$u_{n+1} \geq u_{n+2} \text{ car } f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_n \geq u_{n+1}$ et par suite (u_n) est décroissante.

Méthode 2 : sans utiliser f

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 3}$$

or $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$ d'après la question précédente

d'où $u_n + 1 \geq 0$ et $u_n + 3 > 0$ et $1 - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et par suite $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n \leq 0$ et par suite (u_n) est décroissante.

Remarque : ce n'est pas toujours aussi rapide alors que la récurrence est toujours facile.

(c) Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (u_n) est convergente.

On note L sa limite i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

(d) Montrer que $L = \frac{3L+1}{L+3}$, résoudre cette équation puis déterminer L.

On a aussi $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$

de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n+1}{u_n+3} = \frac{3L+1}{L+3}$

Or la limite d'une suite est unique donc $L = \frac{3L+1}{L+3}$

et comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ on a : $L \geq 1$ ($L \in [1; +\infty[$)

L est solution de l'équation $x = \frac{3x+1}{x+3}$

$x = \frac{3x+1}{x+3} \Leftrightarrow x^2+3x=3x+1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_1=1 \in [1; +\infty[$ ou $x_2=-1 \notin [1; +\infty[$

Conclusion : (u_n) est convergente et converge vers 1

4. Calcul de u_n et de sa limite.

Pour tout entier n , on considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0=2 \\ b_0=1 \end{cases} \text{ et } \forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

On admettra que: $\forall n \geq 0, a_n > 0$ et $b_n > 0$.

(a) Prouver par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n = \frac{a_n}{b_n}$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation* :

Pour $n=0$

$a_0=2; b_0=1$ d'où $\frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1} = 2 = u_0$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $u_n = \frac{a_n}{b_n}$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{3\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + 1}{\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + 3} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3} = \frac{\frac{3a_n + b_n}{2}}{\frac{a_n + 3}{2}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_n = \frac{a_n}{b_n}$

(b) Posons: $\forall n \geq 0, U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de A et U_n puis donner (sans démonstration) l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0 .

$$\forall n \geq 0, U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A U_n \text{ et } U_n = A^n U_0 \text{ où } U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Donner l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

De $U_n = A^n U_0$ il vient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+2^n}{2} & \frac{-1+2^n}{2} \\ \frac{-1+2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2^n + \frac{-1+2^n}{2} \\ -1+2^n + \frac{1+2^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+3 \times 2^n}{2} \\ \frac{-1+3 \times 2^n}{2} \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes coefficients

$$\text{donc } \forall n \geq 0, a_n = \frac{1+3 \times 2^n}{2} \text{ et } b_n = \frac{-1+3 \times 2^n}{2}$$

$$\text{donc } u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1+3 \times 2^n}{2}}{\frac{-1+3 \times 2^n}{2}} = \frac{1+3 \times 2^n}{-1+3 \times 2^n}$$

Conclusion : $\forall n \geq 0, u_n = \frac{1+3 \times 2^n}{-1+3 \times 2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ car } 2 > 1$$

donc nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type ∞/∞ . Il faut donc factoriser par le terme prépondérant (ici 3×2^n)

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{1+3 \times 2^n}{-1+3 \times 2^n} = \frac{3 \times 2^n \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right)}{3 \times 2^n \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1}{-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ (} -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{)}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 2:

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.

Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : *blanc, rouge, rouge* le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

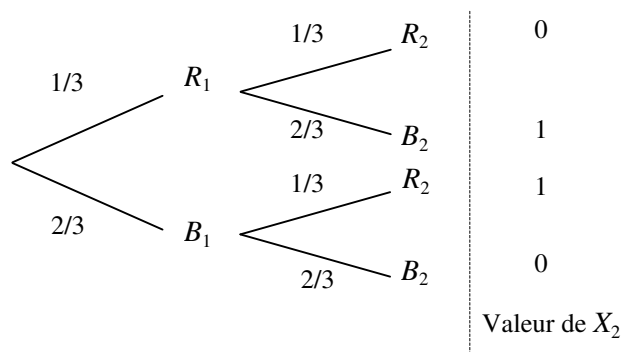
On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3 les événements B_k : « obtenir une boule blanche au k -ème tirage » et R_k : « obtenir une boule rouge au k -ème tirage ».

- 1- Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est à dire que X_2 est égal à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égal à 0 sinon.

a) Justifier que $(X_2=1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2=1)$

Établissons un arbre pondéré de la situation.

Étant donnée qu'il y a remise les probabilités seront les mêmes donc il y a indépendance.



d'où $(X_2=1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$

et par suite

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= P(B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) \text{ car } B_1 \cap R_2 \text{ et } R_1 \cap B_2 \text{ sont incompatibles} \\ &= P(B_1)P(R_2) + P(R_1)P(B_2) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(X_2=1) = \frac{4}{9}$ et par suite $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{4}{9}\right)$.

b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

$$E(X_2) = p = \frac{4}{9}$$

$$V(X_2) = p(1-p) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

- 2- Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.

a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2 .

L'urne et la règle du jeu étant analogues lors des deux premiers tirages et lors des deux suivants puisqu'il y a remise alors X_3 suit la même loi que X_2

- b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages.
Exprimer G en fonction de X_2 et X_3 . En déduire $E(G)$.

G est la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Elle est donc égale à la somme des points obtenue lors du deuxième tirage et du troisième tirage.

Donc $G = X_2 + X_3$

$$E(G) = E(X_2 + X_3) = E(X_2) + E(X_3) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

car X_2 et X_3 suivent la même loi donc elles ont la même espérance

Conclusion : $G = X_2 + X_3$ et $E(G) = \frac{8}{9}$

- 3- a) Exprimer l'événement $(X_2=1) \cap (X_3=1)$ en fonction de B_1, B_2, B_3 et R_1, R_2, R_3 .

$(X_2=1) \cap (X_3=1)$ signifie qu'au 2ème tirage le joueur marque un point donc changement de couleur et qu'au 3ème tirage il marque encore un point donc changement à nouveau de couleur

donc $(X_2=1) \cap (X_3=1) = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3)$

Conclusion : $(X_2=1) \cap (X_3=1) = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3)$

En déduire que $P((X_2=1) \cap (X_3=1)) = \frac{2}{9}$

$$P((X_2=1) \cap (X_3=1)) = P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

$$= P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) \text{ car } (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \text{ et } (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \text{ sont disjoints}$$

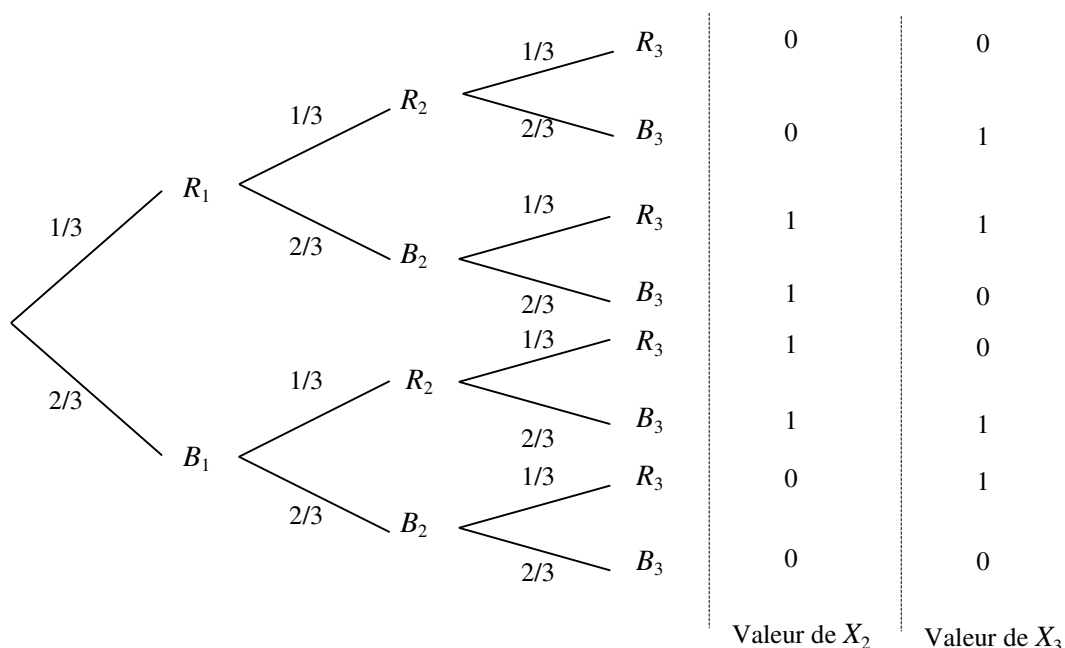
$$= P(B_1)P(R_2)P(B_3) + P(R_1)P(B_2)P(R_3) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2 \times 3}{3 \times 9} = \frac{2}{9}$$

Conclusion : $P((X_2=1) \cap (X_3=1)) = \frac{2}{9}$

Remarque: on aurait pu aussi s'aider d'un arbre



b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3)

$(X_2=1) \cap (X_3=0)$ signifie qu'au 2ème tirage le joueur marque un point donc changement de couleur et qu'au 3ème tirage il marque 0 point donc pas de changement de couleur

$$\text{donc } (X_2=1) \cap (X_3=0) = (B_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

$$\begin{aligned} P(X_2=1) \cap (X_3=0) &= P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \\ &= P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) \text{ car } (B_1 \cap R_2 \cap R_3) \text{ et } (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \text{ sont disjoints} \\ &= P(B_1)P(R_2)P(R_3) + P(R_1)P(B_2)P(B_3) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$(X_2=0) \cap (X_3=0)$ signifie qu'au 2ème tirage le joueur marque 0 point donc pas de changement de couleur et qu'au 3ème tirage il marque encore 0 point donc pas de changement de couleur

$$\text{donc } (X_2=0) \cap (X_3=0) = (R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

$$\begin{aligned} P(X_2=1) \cap (X_3=0) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \text{ car } (R_1 \cap R_2 \cap R_3) \text{ et } (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \text{ sont disjoints} \\ &= P(R_1)P(R_2)P(R_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{3 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(X_2=0) \cap (X_3=1)$ signifie qu'au 2ème tirage le joueur marque 0 point donc pas de changement de couleur et qu'au 3ème tirage il marque 1 point donc changement de couleur

$$\text{donc } (X_2=0) \cap (X_3=1) = (R_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

$$\begin{aligned} P(X_2=1) \cap (X_3=1) &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3) \\ &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) \text{ car } (R_1 \cap R_2 \cap B_3) \text{ et } (B_1 \cap B_2 \cap R_3) \text{ sont disjoints} \\ &= P(R_1)P(R_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(R_3) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Conclusion :

$X_2 \backslash X_3$	0	1	loi de X_2
0	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
loi de X_3	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

En déduire que $\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$

$$E(X_1 X_2) = 1 \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{cov}(X_2, X_3) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \frac{4}{9} = \frac{18-16}{81} = \frac{2}{81}$$

Conclusion : $\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$

4- Calculer $V(G)$.

$$V(G) = V(X_2 + X_3) = V(X_2) + V(X_3) + 2\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{20}{81} + \frac{20}{81} + 2 \times \frac{2}{81} = \frac{20+20+4}{81} = \frac{44}{81}$$

Conclusion : $V(G) = \frac{44}{81}$