

CORRECTION DU DEVOIR N°09

Exercice 1:

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A : Calcul de la puissance n-ème de A .

1- Calculer le produit matriciel $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ La matrice A est-elle inversible ?

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que A n'est pas inversible par l'absurde

On suppose A inversible alors il existe une matrice, noté A^{-1} , tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\text{on a } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en multipliant à gauche par A^{-1} , il vient $A^{-1}A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ce qui est absurde ! ! !}$$

donc A n'est pas inversible.

Conclusion : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et A n'est pas inversible

2- Calculer A^2 , A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^2 + A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^2 + A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = A^3$$

Conclusion :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$$

3- Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$$

Donner a_1 et b_1

Soit $\mathcal{P}_n$, la propriété : « il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$ ».

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n , $n > 0$.

♦ *Initialisation*

Si $n = 1$, on a $A = 0A^2 + 1A$ donc il existe deux réels $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ tel que $A = a_1 A^2 + b_1 A$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

♦ *Hérédité*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n

c'est-à-dire il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$

Montrons la propriété au rang $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n A^2 + b_n A) A = a_n A^3 + b_n A^2 = \frac{1}{2} a_n (A^2 + A) + b_n A^2 = \left(\frac{1}{2} a_n + b_n \right) A^2 + \frac{1}{2} a_n A$$

Donc il existe un réel $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + b_n$ et un réel $b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ tel que $A^{n+1} = a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$

Donc la propriété est démontrée au rang $n + 1$

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

Conclusion :

Pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$

$$\text{avec } \begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

4- Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.

$$\text{En déduire que : } b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n = a_n + b_n$$

donc la suite (c_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = a_n + b_n$ est constante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = a_n + b_n = a_1 + b_1 = 0 + 1 = 1$$

Conclusion : Pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.

$$\text{De plus } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}(1 - b_n) = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

Conclusion : Pour tout n non nul : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$

5- Exprimer alors b_n et a_n en fonction de n .

$$\text{Pour tout } n \text{ non nul : } b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

(b_n) est une suite arithmético-géométrique.

- Recherche du point fixe

$$x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

- Suite auxiliaire

$$\text{On définit la suite } (v_n) \text{ par } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = b_n - \frac{1}{3}$$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = b_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times q^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- Expression de b_n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = v_n + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

$$a_n = 1 - b_n = 1 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Partie B : Étude de la loi d'une variable aléatoire X_n

Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0 , C_1 , C_2 selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0 , à l'instant $n+1$ il est en C_1
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^*$, le point lumineux est en C_1 , à l'instant $n+1$ il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ le point lumineux est en C_2 , à l'instant $n+1$ il est en C_1

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i , pour $i \in \{0,1,2\}$

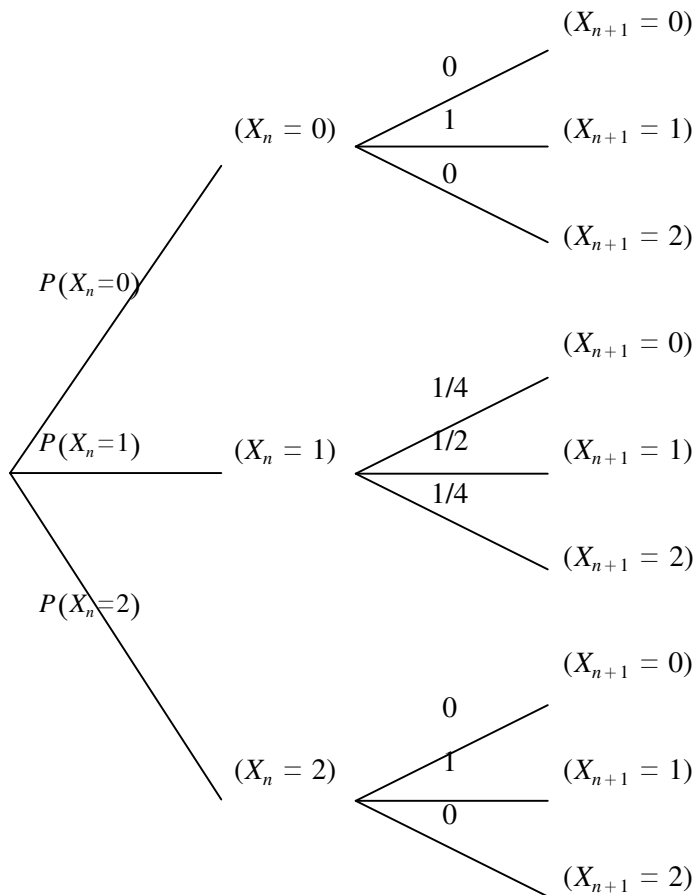
1- On note U_n la matrice: $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n=i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n = i)$.

Préciser U_0 et U_1 .

D'après l'énoncé, le point lumineux est en C_0 à l'instant 0 et par suite, il est en C_1 à l'instant 1 (c'est la deuxième indication)

Conclusion : $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2- Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = A U_n$
Établissons un arbre pondéré de la situation pour tout entier n non nul



Pour tout entier n non nul , $(X_n=0)$, $(X_n=1)$ et $(X_n=2)$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totale on a :

$$P(X_{n+1} = 0) = P((X_n=0) \cap (X_{n+1} = 0)) + P((X_n=1) \cap (X_{n+1} = 0)) + P((X_n=2) \cap (X_{n+1} = 0))$$

$$P(X_{n+1} = 0) = 0 P(X_n=0) + \frac{1}{4} P(X_n=1) + 0 P(X_n=2)$$

de même

$$P(X_{n+1} = 1) = P((X_n=0) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n=1) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n=2) \cap (X_{n+1} = 1))$$

$$P(X_{n+1} = 1) = 1 P(X_n=0) + \frac{1}{2} P(X_n=1) + 1 P(X_n=2)$$

$$P(X_{n+1} = 2) = P((X_n=0) \cap (X_{n+1} = 2)) + P((X_n=1) \cap (X_{n+1} = 2)) + P((X_n=2) \cap (X_{n+1} = 2))$$

$$P(X_{n+1} = 2) = 0 P(X_n=0) + \frac{1}{4} P(X_n=1) + 0 P(X_n=2)$$

$$\text{donc } U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0P(X_n=2) \\ 1P(X_n=0) + \frac{1}{2}P(X_n=1) + 1P(X_n=2) \\ 0P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

$$\text{de plus } AU_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0P(X_n=2) \\ 1P(X_n=0) + \frac{1}{2}P(X_n=1) + 1P(X_n=2) \\ 0P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

Conclusion : Pour tout entier n non nul $U_{n+1} = AU_n$

3- En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$

Sont $\mathcal{P}_n$, « $U_n = A^n U_0$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul n ,

♦ *Initialisation* :

$A^1 U_0 = AU_0 = U_1$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$

donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

♦ *Hérédité* :

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $U_n = A^n U_0$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n : $U_n = A^n U_0$

4- a) Écrire un programme Scilab qui, étant donné un entier naturel n , calcule le vecteur U_n .

```
n=input('n=')
U=[1;0;0]
A=[0,1/4,0;1,1/2,1;0,1/4,0]
for k=1:n
    U=A*U
end
disp(U)
```

b) Le tester pour différentes valeurs de n . Que remarque-t-on ?

pour $n=10$ on obtient
n=10

0.1669922
0.6660156
0.1669922

pour $n=100$ on obtient
n=100

0.1666667
0.6666667
0.1666667

Cela semble converger rapidement vers un état stable.

$P(X_n=0)$ semble converger vers 16,7% soit environ $\frac{1}{6}$

$P(X_n=1)$ semble converger vers 66,7% soit environ $\frac{2}{3}$

$P(X_n=3)$ semble converger vers 16,7% soit environ $\frac{1}{6}$

5- Préciser U_2 , puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$

$$U_2 = A U_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

De plus, pour tout entier naturel non nul n : $U_n = A^n U_0$

Or $A^n = a_n A^2 + b_n A$

Donc $U_n = A^n U_0$

$$= (a_n A^2 + b_n A) U_0$$

$$= a_n A A U_0 + b_n A U_0$$

$$= a_n A U_1 + b_n U_1 \quad \text{car } U_1 = A U_0$$

$$= a_n U_2 + b_n U_1 \quad \text{car } U_2 = A U_1$$

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n , $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$

6- En déduire les probabilités $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ en fonction de n , ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

$$a_n U_2 + b_n U_1 = a_n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a_n \\ \frac{1}{2} a_n + b_n \\ \frac{1}{4} a_n \end{pmatrix} = U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel non nul n

$$P(X_n=0) = \frac{1}{4} a_n = \frac{1}{4} \left(\left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{6}$$

$$P(X_n=1) = \frac{1}{2} a_n + b_n = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

$$P(X_n=2) = \frac{1}{4} a_n = \frac{1}{4} \left(\left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{6}$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$ car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n

$$P(X_n=0) = \left(-\frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{6} \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=0) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_n=1) = \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X_n=2) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=2) = \frac{1}{6}$$

7- Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n .

$$X_n(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^2 kP(X_n=k) \\ &= 0P(X_n=0) + 1P(X_n=1) + 2P(X_n=2) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} + 2\left(\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion :

Pour tout entier naturel non nul n , $E(X_n) = 1$ donc l'espérance de X_n est indépendante de n .

Exercice 2:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

1- On définit pour tout x de $[0,1]$, la fonction f par $f(x) = \ln(x^2+1)$

a) Calculer pour tout x de $[0,1]$, $f'(x)$.

f existe $\Leftrightarrow 1+x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -1$ toujours vraie donc f est définie sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Conclusion : $\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

b) En déduire la valeur de J_1

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (le dénominateur x^2+1 ne s'annule jamais) donc admet des primitives et par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*$, J_n existe.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2} \left[f(x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\ln|1+x^2| \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $J_1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

2- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

Analyse de la question : nous sommes amenés à encadrer $\frac{x^n}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ en reconstruisant et comme

on veut du $\frac{1}{n+1}$ on ne reconstruit pas le terme x^n

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$1 \leq 1+x^2 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n \text{ car } \forall x \in [0, 1], x^n \geq 0$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \text{ d'après la positivité de l'intégrale et } 0 < 1$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{car } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) Étudier la convergence de (J_n)

$$\text{de } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{il vient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\text{par suite en appliquant le théorème des gendarmes on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

Conclusion : (J_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

3- a) En intégrant par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$

$x \mapsto x^n \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues donc admet des primitives et par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n$ existe

On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(1+x^2) & u'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ v'(x) &= x^n & v(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc je peux utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\
&= \frac{1}{n+1} \ln(2) - 0 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2} \text{ car } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \text{ donc } J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$

b) Étudier la convergence de (I_n)

De $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+2} = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} J_{n+2} = 0$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Conclusion : (I_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$