

CORRECTION DU DEVOIR N°10

Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1- Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

$\forall x \in [0,1], 1+x \neq 0$

$x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme inverse d'une fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas donc admet des primitives et par suite u_0 existe.

$u_0 = \left[\ln|1+x| \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$ on reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+x$ et $u'(x) = 1$

Conclusion : $u_0 = \ln(2)$.

2- Démontrer que pour tout entier n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de u_1

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

de plus si $n=0$, il vient $u_{0+1} + u_0 = \frac{1}{0+1}$ et par suite $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(2)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(2)$.

3- Écrire un programme qui permet de calculer les 100 premières termes de la suite (u_n)

```
u=log(2)// u0 et log designe ln
for k=1:99
    u=1/k-u
    disp(u) // le disp est avant le end afin d'afficher tous les termes
end
```

Remarque: de $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ il vient $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n}$ et par suite $u_k = \frac{1}{k} - u_{k-1}$

4- Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque : on aurait pu procédé autrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ donc } u_{n+1} > 0$$

$$\text{d'où } u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1} \text{ et } \frac{1}{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{n+1} \text{ car } u_{n+1} > 0$$

$$\text{donc } 0 < u_n < \frac{1}{n+1} \text{ et on conclut par le théorème des gendarmes}$$

Exercice 2 :

PARTIE 1 : Calcul matriciel

On considère les trois matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = QMQ$$

1- Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}

$$Q \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Conclusion :

De $Q \times Q = I_3$ on en déduit Q est inversible et $Q^{-1} = Q$

2- Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).

$$MQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$QM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } D = QMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } D \text{ est diagonale}$$

Justifier que $M = QDQ$.

$$M = QDQ$$

$MQ = QDQ$ en multipliant par Q à droite dans chaque membre

$$MQ = QD \quad \text{car } QQ = I_3 \text{ et } DI_3 = I_3$$

$QM = QD$ en multipliant par Q à gauche dans chaque membre

$$QM = D \quad \text{car } QQ = I_3 \text{ et } I_3 D = D$$

Conclusion : $M = QDQ$.

3- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $M^n = QD^nQ$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

♦ *Initialisation :*

Pour $n=0$ $QD^0Q = QI_3Q = QQ = I_3 = M^0$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $M^n = QD^nQ$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$M^{n+1} = M^n M = QD^nQ QDQ = QD^n I_3 DQ = QD^n DQ = QD^{n+1}Q$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$

4- Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ est diagonale}$$

$$D^n Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$QD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

PARTIE II : Étude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.

On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2 on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3 on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :

- A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n ».

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$

1- Calculer a_1 , b_1 et c_1

On note P_k l'événement : « obtenir pile au k ième lancer »

A l'étape 1, on lance deux pièces d'où

$$\begin{aligned} a_1 &= P(A_1) = P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) \\ &= P(\overline{P_1})P(\overline{P_2}) \text{ car les lancers sont indépendants} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= P(B_1) = P((P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)) \\ &= P(P_1 \cap \overline{P_2}) + P(\overline{P_1} \cap P_2) \text{ car } (P_1 \cap \overline{P_2}) \cap (\overline{P_1} \cap P_2) = \emptyset \\ &= P(P_1)P(\overline{P_2}) + P(\overline{P_1})P(P_2) \text{ car les lancers sont indépendants} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= P(C_1) = P(P_1 \cap P_2) \\ &= P(P_1)P(P_2) \text{ car les lancers sont indépendants} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\textbf{Conclusion : } a_1 = \frac{1}{4} \qquad b_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et } c_1 = \frac{1}{4}$$

Remarque 1: On aurait pu raisonner autrement en définissant une variable aléatoire X qui compte le nombre de pile au cours des 2 lancers de pièces.

L'épreuve consiste à lancer une pièce. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "la pièce amène pile" de probabilité $\frac{1}{2}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité $\frac{1}{2}$

L'expérience se répète 2 fois de **manière identique et indépendante**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 2 expériences.

Conclusion :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$

$$X(\Omega) = \llbracket 0 ; 2 \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0 ; 2 \rrbracket, P(X=k) = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}$$

$$a_1 = P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = P(X=1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Remarque 2 : On retrouve évidemment $a_1 + b_1 + c_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

2- Soit n un entier naturel non nul.

Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$.

Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

A_{n+1} sachant A_n est l'événement « obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$ sachant que l'on a obtenu 0 pile à l'étape n »

Si à l'étape n on a obtenu 0 pile alors à l'étape $(n+1)$ on lance les pièces ayant amené pile de l'étape précédente c'est à dire aucune et par suite A_{n+1} sachant A_n est l'événement « obtenir 0 pile en lançant aucune pièce » c'est donc un événement certain .

donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$

A_{n+1} sachant B_n est l'événement « obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$ sachant que l'on a obtenu 1 pile à l'étape n »

Si à l'étape n on a obtenu 1 pile alors à l'étape $(n+1)$ on lance les pièces ayant amené pile de l'étape précédente c'est à dire une seule et par suite A_{n+1} sachant B_n est l'événement « obtenir 0 pile en lançant une seule pièce » c'est à dire « obtenir face en lançant une seule pièce »

donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$

A_{n+1} sachant C_n est l'événement « obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$ sachant que l'on a obtenu 2 pile à l'étape n »

Si à l'étape n on a obtenu 2 pile alors à l'étape $(n+1)$ on lance les pièces ayant amené pile de l'étape précédente c'est à dire deux et par suite A_{n+1} sachant C_n est l'événement « obtenir 0 pile en lançant deux pièces » c'est à dire « obtenir 2 fois faces en lançant deux pièces » c'est donc un événement certain

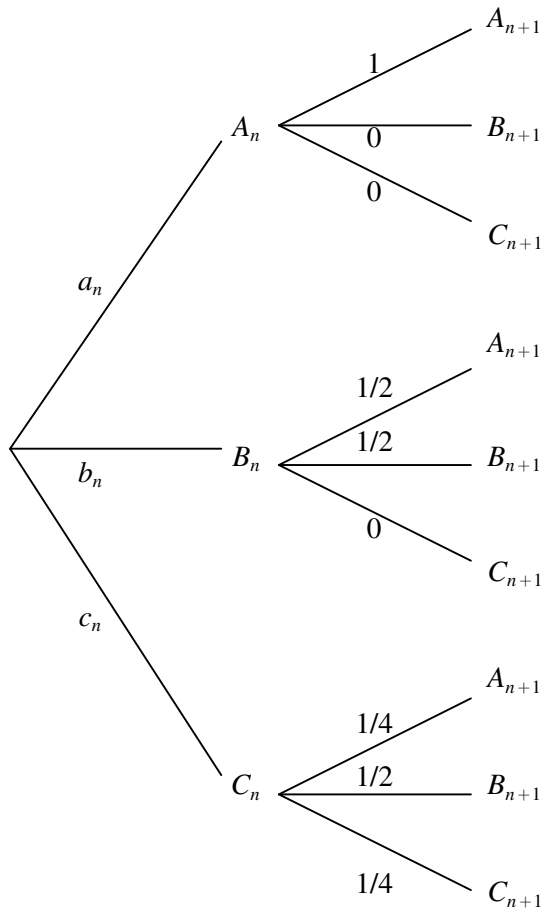
donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = c_1 = \frac{1}{4}$

Conclusion : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = c_1 = \frac{1}{4}$

3- À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente on en déduit l'arbre pondéré de la situation



Pour tout entier $n \geq 1$,

A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= 1a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap C_n) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap A_n) + P(C_{n+1} \cap B_n) + P(C_{n+1} \cap C_n) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= 0a_n + 0b_n + \frac{1}{4}c_n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$

4- (a) Vérifier que $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où la matrice M a été définie dans la partie I.

$$\forall n \geq 1, M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

(b) Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

♦ *Initialisation* :

Pour $n=1$ $M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

♦ *Hérédité* :

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

5- (a) En déduire que : $\forall n \geq 1, P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, P(C_n) = \frac{1}{4^n}$

De $\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ il vient $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

d'où

$$\begin{aligned} P(A_n) &= a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{2}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ &= 1 + \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n} \quad \text{car } \frac{2}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ et } \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 \frac{1^n}{2^n} = \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_n) &= b_n = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{2}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \quad \text{car } \frac{2}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{2}{4^n} \end{aligned}$$

$$P(C_n) = c_n = 0 + 0 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, P(C_n) = \frac{1}{4^n}$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

$$\forall n \geq 1, P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n} + \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} + \frac{1}{4^n} = 1$$

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Conclusion :

$$\forall n \geq 1, P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$