

CORRECTION DU DEVOIR N°11

Exercice 1 :

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0=0$ et par la relation, valable

pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

1- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$Df = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme **polynôme** !!!

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{2} = x$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$, « $0 \leq u_n \leq 1$ » pour tout entier naturel n

♦ *Initialisation*

$u_0 = 0$ donc $0 \leq 0 \leq 1$ donc la propriété est vérifiée au premier rang.

♦ *Hérédité*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $0 \leq u_n \leq 1$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

de plus $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Alors $0 \leq f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \leq 1$

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ donc la propriété est prouvée au rang $(n+1)$

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion :

Donc pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 1$

b) Étudier les variations de la suite (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$$

Conclusion :

la suite (u_n) est croissante

Remarque : On aurait pu aussi le démontrer par récurrence

c) Dédurre des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

(u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de (u_n)

on a aussi $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

$$\text{de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2} = \frac{\ell^2 + 1}{2}$$

Or la limite d'une suite est unique donc $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ on a : $0 \leq \ell \leq 1$

ℓ est donc solution de l'équation $x = \frac{x^2 + 1}{2}$

$$x = \frac{x^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } 1 \in [0,1] \text{ donc } \ell = 1$$

Conclusion : (u_n) est convergente et converge vers 1.

2- a) Compléter le programme scilab, qui renvoie la valeur de u_n

```
n=input('valeur de n ?')
u=zeros(1,n+1)
u(1)=0
for k=2:n+1
    u(k) = (u(k-1)^2+1)/2
end
disp('u'+string(n)+'=' +string(u(n+1)))
```

b) En déduire un programme scilab qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a: $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$

```
function y=f(x)
    y=(x^2+1)/2
endfunction

u=0
n=0//n est le compteur
while 1-u>=10^(-3)
    n=n+1
    u=f(u)
end
disp('n='+string(n))
```

3- Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$

a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k - v_{k+1} = (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k = \frac{(u_k - 1)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}$$

b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$

Il s'agit de sommes télescopiques

□ **Méthode 1 :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \dots + (v_{n-1} - v_n) = v_0 - v_n$$

□ **Méthode 2 :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{p=1}^n v_p = v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k + v_n \right) = v_0 - v_n$$

en posant $p = k + 1$

c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$

De la question 2a) on a : $\forall k \in \mathbb{N}, v_k^2 = 2(v_k - v_{k+1})$

On note S_{N-1} la $(N-1)^{\text{ième}}$ somme partielle

$$S_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} (v_k - v_{k+1}) = 2(v_0 - v_N) = 2(1 - u_0 - 1 + u_N) = 2(u_N - u_0)$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = 1$

par suite $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{N-1} = 2(1 - u_0) = 2(1 - 0) = 2$

Conclusion : (S_N) est convergente donc la série $\sum_{k \geq 0} v_k^2$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$

Exercice 2: ECRICOME 2016

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les

relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$

1- Puissances successives de la matrice A

a) Calculer $(A - I)(A - 2I)(A - 3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (A-I)(A-2I)(A-3I) &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3
 \end{aligned}$$

Soit Q le polynôme définie par $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Q est un polynôme annulateur de A et par suite ses racines sont les valeurs propres possibles

Or $Q(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=2$ ou $x=3$

Conclusion : $(A-I)(A-2I)(A-3I)=0_3$ et les valeurs propres possibles de A sont **1, 2 et 3**.

b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs colonnes qui sont vecteurs propres de A . Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.

Méthode 1: recherche des valeurs propres et vecteurs propres

□ **Vecteur propre associé à la valeur propre 1**

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AX=1X &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y-2z=x \\ 2x-y-2z=y \\ -x+y+3z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y-2z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y-2z=0 \\ x-y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \\
 &\quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=y \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la seule solution du système donc 1 est une valeur propre de A associé au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

□ **Vecteur propre associé à la valeur propre 2**

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AX=2X &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y-2z=2x \\ 2x-y-2z=2y \\ -x+y+3z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y-2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y-2z=0 \\ -y=0 \\ L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la seule solution du système donc 2 est une valeur propre de A associé au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

□ **Vecteur propre associé à la valeur propre 3**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 2z = 3x \\ 2x - y - 2z = 3y \\ -x + y + 3z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = y = -z \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la seule solution du système donc 3 est une valeur propre de A associé au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Méthode 2: Vérification à l'aide de P

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3

c) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = b \\ y - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y = a - b \\ y - z = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y = a - b \\ z = a - b - c \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

Ce système triangulaire a tous les coefficients de la diagonale non nuls. Il est donc de Cramer et par suite P est inversible.

De plus $\begin{cases} x + y + z = a \\ y = a - b \\ z = a - b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - z = -a + 2b + c \\ y = c + z = a - b \\ z = a - b - c \end{cases}$

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

d) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire
l'expression de A en fonction des matrices P, D et P⁻¹.

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $AP = PD$ et par suite, comme P est inversible $A = PDP^{-1}$

Remarque: P est inversible (formée des vecteurs propres de A) , D est diagonale (formée des valeurs propres de A dans le même ordre que P) et $AP = PD$ donc A est diagonalisable .

e) Exprimer Aⁿ en fonction de P, P⁻¹ et Dⁿ pour tout n ∈ ℕ

Soit $\mathcal{P}_n$, « $A^n = PD^nP^{-1}$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $A^n = PD^nP^{-1}$

Montrons la propriété au rang n + 1

$$A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1} P D P^{-1} = PD^n I D P^{-1} = PD^n D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1} \text{ car } PP^{-1} = I \text{ et } D^n D = D^{n+1}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence , $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion : pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$

f) Calculer Aⁿ pour tout n ∈ ℕ

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ diagonale et } 1^n = 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ d'après la question e)

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix}$$

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2^n + 3^n & 2 - 2^n - 3^n & 1 - 3^n \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix}$

2- Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

a) Vérifier que l'on a la relation: $C = AC + B$.

$$AC + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = C$$

Conclusion : $C = AC + B$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} AX_n + B &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n \\ 2u_n - 1v_n - 2w_n \\ -1u_n + v_n + 3w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ 2u_n - 1v_n - 2w_n + 2 \\ -1u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$

c) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $X_n = C - A^n C$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

$$C - A^0 C = C - IC = C - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } u_0 = v_0 = w_0 = 0 \text{ (dans l'énoncé au début de l'exercice)}$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $X_n = C - A^n C$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$X_{n+1} = AX_n + B$ d'après la question 2b)

$$\begin{aligned}
&= A(C - A^n C) + B \\
&= AC - AA^n C + B \\
&= AC - A^{n+1} C + B \\
&= AC + B - A^{n+1} C \\
&= C - A^{n+1} C \text{ car } AC + B = C \text{ d'après la question 2a)}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion : pour tout entier naturel n , $X_n = C - A^n C$

d) En déduire les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

pour tout entier naturel n ,

$$X_n = C - A^n C$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 + 2^n + 3^n & 2 - 2^n - 3^n & 1 - 3^n \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 + 2^n + 3^n + 2 - 2 \cdot 3^n \\ -1 + 3^n + 2(1 - 3^n) \\ 2^n - 3^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + 2^n - 3^n \\ 1 - 3^n \\ 2^n + 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n \\ -1 + 3^n \\ 2 - 2^n - 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2^n + 3^n \quad v_n = 3^n - 1 \quad \text{et} \quad w_n = 2 - 2^n - 3^n$