

CORRECTION DU DEVOIR N°12

Exercice 1 :

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1- a) Calculer A^3 . Vérifier que $A^3=4A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -24 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

Conclusion : $A^3=4A$.

b) En déduire que les valeurs propres que A peut avoir sont : 0, 2 et -2.

De $A^3=4A$ il vient $A^3-4A=0_3$ et par suite le polynôme Q définie par $Q(x)=x^3-4x$ est un polynôme annulateur de A .

Q est un polynôme annulateur de A et par suite ses racines sont les valeurs propres possibles

Or $Q(x)=x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$

$Q(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Conclusion : 0, 2 et -2 sont les valeurs propres possibles de A

c) On considère les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Montrer que X , Y et Z sont vecteurs propres de A . Quelles sont leurs valeurs propres associées?

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0X$$

or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc **X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0**

$$AY = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2Y$$

or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc **Y est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2**

$$AZ = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2Z$$

or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc **Z est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2**

d) Justifier, en utilisant les questions précédentes, que $AP=PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

P est formée des vecteurs propres de A dans le même ordre que les valeurs propres dans D donc d'après le cours on a : $AP=PD$ et par suite A est diagonalisable

2- a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ x+z=b \\ x-y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ y=a-b \\ 2y+z=a-c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ y=a-b \\ -z=a-2b+c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3$$

Ce système triangulaire a tous les coefficients de la diagonale non nuls . Il est donc de Cramer et par suite P est inversible.

$$\text{De plus } \begin{cases} x+y+z=a \\ y=a-b \\ -z=a-2b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-y-z=a-b+c \\ y=a-b \\ z=-a+2b-c \end{cases}$$

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n P = P D^n$

Soit $\mathcal{P}_n$, « $A^n P = P D^n$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

$$A^0 P = I P = P$$

$$P D^0 = P I = P$$

$$\text{d'où } A^0 P = P D^0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $A^n P = P D^n$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$\begin{aligned} A^{n+1}P &= APD^n = PDD^n \text{ car } AP = PD. \\ &= PD^{n+1} \text{ car } DD^n = D^{n+1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion : pour tout entier naturel n , $A^n P = PD^n$

c) Donner D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \text{ car } D \text{ est diagonale}$$

de $A^n P = PD^n$ il vient $A^n = PD^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} PD^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & -2^n & 0 \end{pmatrix} \\ PD^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & -2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \text{ et } A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

3- On considère les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers terme $a_0=0$

$$b_0=1 \text{ et } c_0=2 \text{ et pour tout entier naturel } n: \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + 2b_n \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier n .

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = A U_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A U_n = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ -2a_n + 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

b) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de a_{10} :

```
A=[4,-6,2;2,-4,2;-2,2,0]
U=[0;1;2]
for i=1:10
    U=A*U
end
disp(U(1))
```

c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = A^n U_0$.

Soit $\mathcal{P}_n$, « $U_n = A^n U_0$ »

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ,

♦ *Initialisation :*

$$A^0 U_0 = I U_0 = U_0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

♦ *Hérédité :*

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n c'est à dire $U_n = A^n U_0$

Montrons la propriété au rang $n+1$

$$U_{n+1} = A U_n = A(A^n U_0) = A^{n+1} U_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n

Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $U_n = A^n U_0$

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations : $a_n = -2^n$, $b_n = 0$ et $c_n = 2^n$.

$$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$a_n = -2^n - (-2)^{n+1} - 2(-2)^n = -2^n - (-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} = -2^n$$

$$b_n = -(-2)^{n+1} - 2(-2)^n = -(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} = 0$$

$$c_n = 2^n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations : $a_n = -2^n$, $b_n = 0$ et $c_n = 2^n$.

Exercice 2 : ESCP 2008

Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche. On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Le but de l'exercice est de calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X , de deux manières différentes.

Partie : première méthode

1- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

Étant donné qu'il y a 2 boules noires, la première boule blanche apparaît soit au premier tirage soit au deuxième soit au troisième.

Conclusion : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

(b) Calculer la valeur de $P([X = 1])$.

Dans la suite de l'exercice je note B_k l'événement : « la boule blanche est sortie au $k^{\text{ième}}$ tirage » et N_k l'événement : « la boule noire est sortie au $k^{\text{ième}}$ tirage »

Conclusion : $P([X = 1]) = P(B_1) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ car il y a équiprobabilité.

(c) Montrer que $P([X = 2]) = \frac{5}{33}$.

$[X = 2]$ signifie que la boule blanche est apparue au $2^{\text{ème}}$ tirage donc une boule noire au 1^{er}

$$P([X = 2]) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{2 \times 2 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 11} = \frac{5}{33}$$

Conclusion : $P([X = 2]) = \frac{5}{33}$

(d) Calculer $P([X = 3])$

Pour calculer $P([X = 3])$ on a deux méthodes :

□ **Méthode 1 :**

On sait que la somme des probabilités vaut 1

par suite $P([X = 3]) = 1 - (P([X = 1]) + P([X = 2]))$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{33} \right) = 1 - \frac{55 + 10}{66} = \frac{66 - 65}{66} = \frac{1}{66}$$

□ **Méthode 2 :**

$[X = 3]$ signifie que la boule blanche est apparue au $3^{\text{ème}}$ tirage donc une boule noire aux deux premiers tirages

$$P([X = 3]) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{66}$$

Conclusion : $P([X = 3]) = \frac{1}{66}$

2- Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.

On a donc la loi de X

x_i	1	2	3	total
p_i	$\frac{55}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$	1
$x_i p_i$	$\frac{55}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{3}{66}$	$\frac{78}{66} = \frac{6 \times 13}{6 \times 11} = \frac{13}{11}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{55}{66}$	$\frac{40}{66}$	$\frac{9}{66}$	$\frac{104}{66} = \frac{52}{33}$

Conclusion : $E(X) = \frac{13}{11}$

3- Calculer $E(X^2)$ et en déduire que $V(X) = \frac{65}{363}$

D'après la tableau précédent on a : $E(X^2) = \frac{52}{33}$

par suite

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 \\ &= \frac{52}{3 \times 11} - \frac{13^2}{11^2} \\ &= \frac{52 \times 11 - 3 \times 13^2}{3 \times 11^2} \\ &= \frac{572 - 507}{363} = \frac{65}{363} \quad \text{car } 13^2 = 169 \text{ et } 11^2 = 121 \end{aligned}$$

Conclusion : $E(X^2) = \frac{52}{33}$ et $V(X) = \frac{65}{363}$

Partie 2: deuxième méthode

Dans cette partie, on suppose que les deux boules noires sont marquées N et N' . On note Y (respectivement Y') la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire marquée N (respectivement N') est prélevée avant l'apparition d'une boule blanche, et qui vaut 0 sinon.

Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq 2$, on note N_i (respectivement N'_i) l'événement : « la boule noire marquée N (respectivement N') est obtenue au i -ème tirage ».

1- (a) Exprimer l'événement $[Y = 1]$ en fonction de N_1, N'_1, N_2 .

L'événement $[Y = 1]$ signifie que la boule N est apparue avant la boule blanche et par suite la boule blanche ne peut sortir en premier donc cela se produit dans deux cas :

- ☐ soit la boule blanche sort en deuxième et la boule N sort en premier
- ☐ soit la boule blanche sort en troisième et la boule N en second et dans ce cas c'est la boule N' qui est sortie en premier.

Conclusion : $[Y = 1] = N_1 \cup (N'_1 \cap N_2)$.

(b) En déduire que la variable aléatoire Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{11}$

Calculons d'abord $P([Y = 1])$

$$\begin{aligned} P([Y = 1]) &= P(N_1 \cup (N'_1 \cap N_2)) \\ &= P(N_1) + P(N'_1 \cap N_2) \quad \text{car } N_1 \cap (N'_1 \cap N_2) = \emptyset \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \\ &= \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{12}{11} = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Les valeurs prises par Y sont 0 et 1.

Conclusion : Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $P([Y = 1]) = \frac{1}{11}$

(c) Donner la loi de la variable aléatoire Y' .

Pour des raisons analogues à la question précédente on a ;

Conclusion : Y' suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{11}$

2- Justifier que: $X = 1 + Y + Y'$.

X désigne le nombre de boules sorties jusqu'à l'apparition de la première boule blanche.

X est égale aux nombres de boules noires sorties + 1 (qui est la première boule blanche)

Or dans l'urne, il n'y a que deux boules noires . Y vaut 1 si N est sortie et vaut 0 sinon, donc Y représente le nombre de boule N sortie et Y' le nombre de boule N' sortie et par suite $Y + Y'$ le nombre de boules noires sorties.

On a donc $X = 1 + Y + Y'$.

3- Déduire de ce qui précède la valeur de $E(X)$.

$$E(X) = E(1 + Y + Y')$$

$$= 1 + E(Y + Y') \quad \text{car } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$= 1 + E(Y) + E(Y') \quad \text{car } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$= 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{13}{11}$$

Je vous rappelle que si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p

alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Conclusion : $E(X) = \frac{13}{11}$

4- (a) Exprimer l'événement $([Y = 1] \cap [Y' = 1])$ à l'aide des événements N_1, N'_1 .

$([Y = 1] \cap [Y' = 1])$ signifie que les boules N et N' sont sorties avant l'apparition de la blanche.

Par suite, le tirage débute forcément par une noire qui peut être N ou N' suivie encore d'une noire.

Conclusion : $([Y = 1]) \cap [Y' = 1] = (N_1 \cap N'_2) \cup (N'_1 \cap N_2)$

(b) En déduire la valeur de $P([Y = 1]) \cap [Y' = 1])$

$$\begin{aligned} P([Y = 1] \cap [Y' = 1]) &= P((N_1 \cap N'_2) \cup (N'_1 \cap N_2)) \\ &= P(N_1 \cap N'_2) + P(N'_1 \cap N_2) \quad \text{car } (N_1 \cap N'_2) \cap (N'_1 \cap N_2) = \emptyset \\ &= P(N_1)P_{N_1}(N'_2) + P(N'_1)P_{N'_1}(N_2) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \\ &= \frac{2}{12 \times 11} = \frac{1}{66} \end{aligned}$$

Conclusion : $P([Y = 1] \cap [Y' = 1]) = \frac{1}{66}$.

(c) Calculer la valeur de la covariance de Y et Y' , notée $\text{cov}(Y, Y')$.

$$\text{cov}(Y, Y') = E(YY') - E(Y)E(Y')$$

$Y(\Omega)=\{0;1\}$ et $Y'(\Omega)=\{0;1\}$ d'où :

$$E(YY') = 0 \times 0 \times P([Y = 0] \cap [Y' = 0]) + 0 \times 1 \times P([Y = 0] \cap [Y' = 1]) + 1 \times 0 \times P([Y = 1] \cap [Y' = 0]) + 1 \times 1 \times P([Y = 1] \cap [Y' = 1]) = P([Y = 1] \cap [Y' = 1]) = \frac{1}{66}$$

donc

$$\text{cov}(Y, Y') = E(YY') - E(Y)E(Y') = \frac{1}{66} - \frac{1}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{11-6}{6 \times 11 \times 11} = \frac{5}{726}$$

Conclusion : $\text{cov}(Y, Y') = \frac{5}{726}$

(d) Utiliser alors le résultat de la question 2 de cette partie pour déterminer $V(X)$, et retrouver ainsi le résultat de la question 3 de la partie 1.

D'après la question 2 on a : $X = 1 + Y + Y'$

d'où $V(X) = V(1 + (Y + Y'))$

$$= V(Y + Y') \quad \text{car } V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$= V(Y) + V(Y') + 2\text{Cov}(Y, Y')$$

$$= \frac{1}{11} \times \frac{10}{11} + \frac{1}{11} \times \frac{10}{11} + 2 \frac{5}{6 \times 11 \times 11} = \frac{60+60+10}{726} = \frac{130}{726} = \frac{65}{363}$$

Conclusion : $V(X) = \frac{65}{363}$