

CORRECTION DU DEVOIR N°13
ECRICOME 2018

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x)$$

- 1-** Étudier le sens de variation de g , et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x} = \frac{2(x^2 - 2)}{x} = \frac{2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x}$$

$\forall x \in]0;+\infty[, x > 0, 2 > 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{2}$

signe de $x - \sqrt{2}$: $\xrightarrow[\sqrt{2}]{- \quad \oplus \quad +}$

D'où le tableau de variations sans les limites (non demandées)

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$\searrow \quad \nearrow$ $g(\sqrt{2})$	

Conclusion : g est décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ et g est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$
de plus g admet un minimum en $\sqrt{2}$ qui vaut $g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$
car $\ln(\sqrt{2}) = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

- 2-** En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq g(\sqrt{2}) > 0$ car $2(1 - \ln(2)) \approx 0,6$

Conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 0$.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

- 3- Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\ln(x)) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{cases} \end{cases}$$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

- 4- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question suivante.

- 5- Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

Conclusion : la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

- 6- Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D) .

On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.

Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D) revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = \frac{1+\ln(x)}{x}$

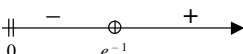
Or $\forall x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $1 + \ln(x)$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $1 + \ln(x) \geq 0$

$$1 + \ln(x) \geq 0$$

$$\ln(x) \geq -1$$

$$x \geq e^{-1} \quad \text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

d'où le signe de $1 + \ln(x)$: 

d'où

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x) - y_D$		0	+
position	$\mathcal{C}$ est en dessous de D	coupe D en A $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{4e}\right)$	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D

$$f(e^{-1}) = \frac{e^{-1}}{4} + \frac{1 + \ln(e^{-1})}{e^{-1}} = \frac{1}{4e} + \frac{1-1}{e^{-1}} = \frac{1}{4e}$$

7- Étudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

f est dérivable sur Df comme somme de fonction dérivable

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{1}{4} + \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2-4\ln(x)}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2}$$

$\forall x \in Df, 4x^2 > 0$ et $g(x) > 0$ d'après la question 2 donc $f'(x) > 0$ et par suite f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

8- (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0; +\infty[$ on a: $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{x^2-4\ln(x)}{4x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

f' est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in Df, f''(x) = 0 - \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) - (2x\ln(x))}{x^4} = \frac{-x + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(-1 + 2\ln(x))}{x^4} = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$$

Conclusion : pour tout réel x de $]0; +\infty[$ on a: $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$

(b) Étudier la convexité de f . La courbe ($\mathcal{C}$) possède-t-elle des points d'inflexion ?

Étudier la convexité de f revient à étudier le signe de $f''(x)$

$\forall x \in Df, x > 0$ et par suite $x^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $2\ln(x)-1$

Pour étudier le signe de $f''(x)$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $2\ln(x)-1 \geq 0$

$$2\ln(x)-1 \geq 0$$

$$\ln(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq e^{\frac{1}{2}} \quad \text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{d'où le signe de } 2\ln(x)-1 : \quad \begin{array}{c} \# \quad - \quad \oplus \quad + \\ 0 \quad \quad \sqrt{e} \end{array} \quad \text{car } e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

d'où

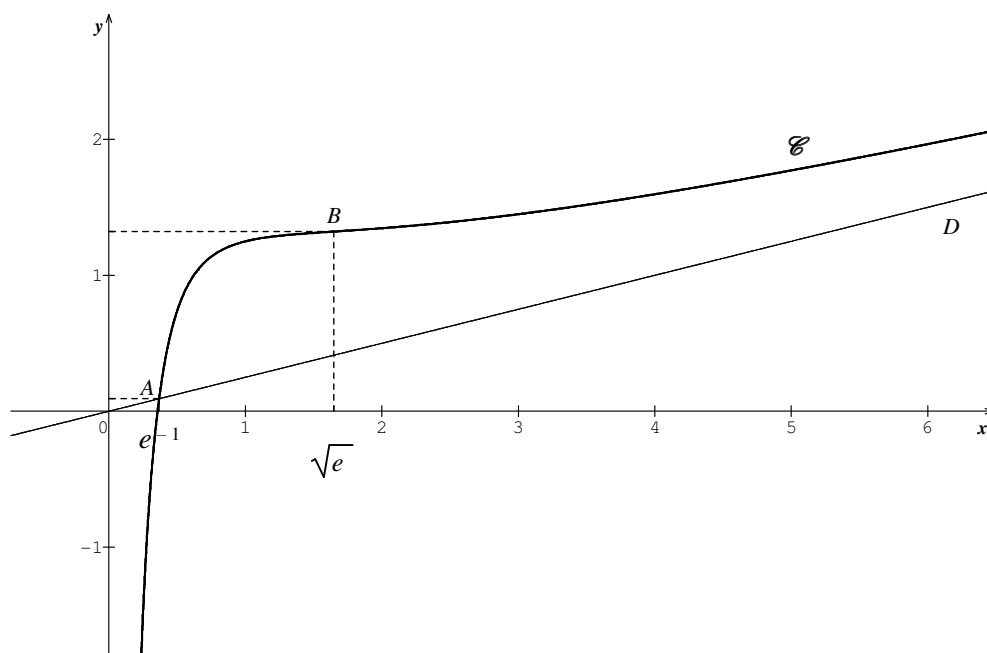
x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	+
convexité	f est concave	point d'inflexion B $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$	f est convexe

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{1 + \ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\ln(e)}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

9- On donne:

$$\frac{1}{e} \approx 0,4 \quad \sqrt{e} \approx 1,6 \quad f(\sqrt{e}) \approx 1,3 \quad f'(\sqrt{e}) \approx 0,1$$

Représenter la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite (D) dans un même repère orthonormé.



Partie II.

1- Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = (\ln(x))^2$

u est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in]0, +\infty[, u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

Conclusion : $\forall x \in]0, +\infty[, u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$

2- En déduire que $\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$

f est continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable donc admet des primitive et par suite $\int_1^e f(x)dx$ existe

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}u'(x) \right) dx \quad \text{car } \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \right) = \frac{1}{2}u'(x) \\ &= \left[\frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2} \times u(x) \right]_1^e \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) \right]_1^e \quad \text{car } |x|=x \text{ puisque } x \in [1, e] \text{ on a } x > 0 \\ &= \left(\frac{e^2}{8} + \ln(e) + \frac{1}{2}\ln^2(e) \right) - \left(\frac{1}{8} + \ln(1) + \frac{1}{2}\ln^2(1) \right) \\ &= \frac{e^2}{8} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - 0 \quad \text{car } \ln(e)=1 \text{ et } \ln(1)=0 \\ &= \frac{e^2}{8} + \frac{8+4-1}{8} \\ &= \frac{e^2+11}{8}\end{aligned}$$

Conclusion : $\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$

3- Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} \frac{8}{e^2+11}f(x) & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est
une densité de probabilité.

$x \mapsto 0$ est définie, continue et positive comme constante sur $\mathbb{R}$ donc sur $] -\infty; 1[$ et sur $]e; +\infty[$

$x \mapsto \frac{e^2+11}{8}f(x)$ est définie continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable (**d'après question 7**) donc sur $[1, e]$

De plus $\forall x \in [1, e]$, $f(x) \geq f(1)$ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (**d'après question 7**)

$$\text{et } f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1+\ln(1)}{1} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0$$

donc $\forall x \in [1, e]$, $f(x) \geq f(1) \geq 0$

$\int_{-\infty}^1 h(x)dx$ converge et vaut 0 car $\forall x \in]-\infty, 1[, h(x)=0$

$\int_e^{+\infty} h(x)dx$ converge et vaut 0 car $\forall x \in]e; +\infty[, h(x)=0$

$$\int_1^e h(x)dx = \int_1^e \frac{8}{e^2+11}f(x)dx = \frac{8}{e^2+11} \int_1^e f(x)dx = \frac{8}{e^2+11} \times \frac{e^2+11}{8} = 1 \quad \text{car } \int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$$

par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ converge

$$\text{et vaut } \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^1 h(x)dx + \int_1^e h(x)dx + \int_e^{+\infty} h(x)dx = 0 + 1 + 0 = 1$$

Conclusion :

h est continue sauf peut être en 1 et e , h est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ converge et vaut 1

donc h est une densité de probabilité.

4- Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.

(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln(x) dx = 1$

$x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1, e]$ donc admet des primitive et par suite $\int_1^e \ln(x) dx$ existe

On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 .

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x) dx &= \left[x \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx \\ \int_1^e \ln(x) dx &= \left[x \ln(x) \right]_1^e - \left[x \right]_1^e \\ \int_1^e \ln(x) dx &= (e \ln(e) - 1 \times \ln(1)) - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \text{ car } \ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_1^e \ln(x) dx = 1$

(b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

$\int_{-\infty}^1 xh(x) dx$ converge et vaut 0 car $\forall x \in]-\infty, 1[, xh(x) = 0$

$\int_e^{+\infty} xh(x) dx$ converge et vaut 0 car $\forall x \in]e; +\infty[, xh(x) = 0$

$$\int_1^e xh(x) dx = \int_1^e \frac{8x}{e^2 + 11} f(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \int_1^e xf(x) dx = \frac{8}{e^2 + 11} \times \frac{e^3 + 12e - 1}{12} = \frac{2(e^3 + 12e - 1)}{3(e^2 + 11)}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \int_1^e xf(x) dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{4} + 1 + \ln(x) \right) dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx + \int_1^e \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + x \right]_1^e + \int_1^e \ln(x) dx = \left(\frac{e^3}{12} + e \right) - \left(\frac{1}{12} + 1 \right) + 1 \\ &= \frac{e^3 + 12e - 1 - 12 + 12}{12} = \frac{e^3 + 12e - 1}{12} \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$ converge donc X admet une espérance

$$\begin{aligned} \text{et } E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx = \int_{-\infty}^1 xh(x) dx + \int_1^e xh(x) dx + \int_e^{+\infty} xh(x) dx \\ &= 0 + \frac{2(e^3 + 12e - 1)}{3(e^2 + 11)} + 0 = \frac{2(e^3 + 12e - 1)}{3(e^2 + 11)} \end{aligned}$$