

**CORRECTION DU DEVOIR N°14**

**Exercice 1: ESC 2003**

Les parties A, B et C sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est la suivante : une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

Pour les parties B et C, on pourra utiliser les événements  $R_k$  : " le  $k$ -ième tirage donne une boule rouge " et  $B_k$  : " le  $k$ -ième tirage donne une boule blanche ", pour  $k$  entier naturel non nul.

**Partie A**

- 1- On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne.  
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

$$\Omega = \{ \{ b_1, b_2 \} , \forall i \in \{ 1 ; 2 \} b_i \in \{ 4 \text{ boules} \} \}$$

$$|\Omega| = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Il y a équiprobabilité car les boules sont indiscernables au toucher .

Soit  $p$  la probabilité d'obtenir deux boules rouges

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**Conclusion** : La probabilité d'obtenir deux boules rouges est  $\frac{1}{2}$ .

- 2- On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de 2 boules rouges.

Soit  $N$  la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

- a) Quelles sont les valeurs prises par  $N$  ?

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

- b) Reconnaitre la loi de  $N$ . On précisera  $P(N = k)$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

L'épreuve consiste à tirer 2 boules simultanément de l'urne. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "le joueur obtient deux boules rouges" de probabilité  $p = \frac{1}{2}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

L'expérience se répète une infinité de fois de **manière identique et indépendante**

$N$  la variable aléatoire égale au rang du premier succès

**Conclusion** :

$N$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , p(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

c) En déduire son espérance et sa variance.

$$E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Au plus tard au quatrième tirage signifie au maximum au quatrième tirage d'où

$$P(N \leq 4) = P(N=1) + P(N=2) + P(N=3) + P(N=4)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \text{ car } \frac{1}{2} \neq 1$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

**Conclusion :**

La probabilité pour que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage est  $\frac{15}{16}$ .

## **Partie B**

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1- Quelles sont les valeurs prises par  $Y$  ?

**Attention le tirage s'effectue sans remise donc ce n'est plus une loi géométrique**

$$Y(\Omega) = \llbracket 1 ; 4 \rrbracket$$

2- Décrire l'événement  $(Y = 2)$  et calculer  $P(Y = 2)$ .

$$(Y = 2) = R_1 \cap B_2$$

$$P(Y = 2) = P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

**Conclusion :**  $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$

3- Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance  $E(Y)$  et sa variance  $V(Y)$ .

$$P(Y = 1) = P(B_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 3) = P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{(R_1 \cap R_2)}(B_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 4) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{(R_1 \cap R_2)}(R_3)P_{(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}(B_4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

d'où la loi de  $Y$

|       |               |               |               |               |       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $y_i$ | 1             | 2             | 3             | 4             | total |
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1     |

**Conclusion :** On reconnaît la loi uniforme donc  $Y$  suit  $\mathcal{U}([1;4])$

$$\text{Par suite } E(Y) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$V(Y) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

- 4- Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer  $Z$  en fonction de  $Y$ .  
En déduire la loi de  $Z$ , son espérance  $E(Z)$  et sa variance  $V(Z)$

$$Z(\Omega) = [0;3]$$

Si  $Y=k$  alors au  $k$ -ième tirage, on a obtenu une boule blanche et aux précédents tirages des boules rouges donc on a tiré  $(k-1)$  boules rouges.

Le nombre de boules rouges restantes est égale au nombre de boules rouges initiales (3) auquel on enlève le nombre de boules rouges déjà extraites  $(Y-1)$  c'est à dire  $Z=3-(Y-1)=4-Y$ .

$$P(Z=0) = P(4-Y=0) = P(Y=4) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z=1) = P(4-Y=1) = P(Y=3) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z=2) = P(4-Y=2) = P(Y=2) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z=3) = P(4-Y=3) = P(Y=1) = \frac{1}{4}$$

**Conclusion :** loi de  $Z$

|       |               |               |               |               |       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $z_i$ | 0             | 1             | 2             | 3             | total |
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1     |

$Z$  suit  $\mathcal{U}([0;3])$

$$E(Z) = E(4-Y) = 4 - E(Y) = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$V(Z) = V(4-Y) = (-1)^2 V(Y) = V(Y) = \frac{5}{4}$$

## Partie C

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors  $X = 6$

- 1- Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?

Pour obtenir deux boules consécutives de même couleur, il est nécessaire de tirer au moins deux boules par suite  $X(\Omega) = [2; +\infty[$ .

**2- Calculer  $P(X = 2)$  et  $P(X = 3)$ .**

$(X = 2)$  signifie qu'au deuxième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur soit rouges soit blanches et par suite  $(X = 2) = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)) \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) \text{ car } (B_1 \cap B_2) \text{ et } (R_1 \cap R_2) \text{ sont incompatibles} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Remarque :  $P_{R_1}(R_2) = P(R_2)$  car il y a remise et par suite indépendance

**Conclusion :**  $P(X = 2) = \frac{5}{8}$ .

$(X = 3)$  signifie qu'au troisième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur :

⇒ soit 2 rouges et au premier tirage 1 blanche

⇒ soit 2 blanches et au premier tirage 1 rouge

et par suite  $(X = 3)$  est la **réunion des évènements incompatibles**  $(B_1 \cap R_2 \cap R_3)$  et  $(R_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P((B_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)) \\ &= P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3 \times 4}{4 \times 16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $P(X = 3) = \frac{3}{16}$ .

**2- Décrire l'événement  $(X = 4)$ , puis l'événement  $(X = 2k)$  pour tout entier  $k \geq 1$  et montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $P(X = 2k) = \frac{5}{8} \left( \frac{3}{16} \right)^{k-1}$**

$(X = 4)$  signifie qu'au quatrième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur :

⇒ soit 2 rouges et au premier tirage 1 rouge et au deuxième 1 blanche

⇒ soit 2 blanches et au premier tirage 1 blanche et au deuxième 1 rouge

et par suite  $(X = 4)$  est la **réunion des évènements incompatibles**  $(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4)$  et  $(B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4)$

pour tout entier  $k \geq 1$

$(X = 2k)$  signifie qu'au  $2k$ -ième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur :

soit 2 rouges et par suite le tirage sera :

|         |       |       |  |  |  |            |            |          |
|---------|-------|-------|--|--|--|------------|------------|----------|
| boules  | $R_1$ | $B_2$ |  |  |  | $B_{2k-2}$ | $R_{2k-1}$ | $R_{2k}$ |
| tirages | 1     | 2     |  |  |  | $2k-2$     | $2k-1$     | $2k$     |

Donc on a alternance de boules rouges et blanches durant  $2k-2$  tirages soit  $\frac{2k-2}{2} = k-1$  boules

blanches tirée et  $k-1$  boules rouges tirées

donc dans ce cas, on a tiré  $k-1$  boules blanches et  $k-1+2=k+1$  boules rouges

Donc la probabilité de cet événement est  $p_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$  car il y a remise et par suite les tirages sont indépendants.

soit 2 blanches et par suite le tirage sera :

|         |       |       |  |  |  |            |            |          |
|---------|-------|-------|--|--|--|------------|------------|----------|
| boules  | $B_1$ | $R_2$ |  |  |  | $R_{2k-2}$ | $B_{2k-1}$ | $B_{2k}$ |
| tirages | 1     | 2     |  |  |  | $2k-2$     | $2k-1$     | $2k$     |

Donc on a alternance de boules blanches et rouges durant  $2k-2$  tirages soit  $\frac{2k-2}{2} = k-1$  boules

blanches tirées et  $k-1$  boules rouges tirées

donc dans ce cas, on a tiré  $k-1$  boules rouges et  $k-1+2=k+1$  boules blanches

Donc la probabilité de cet événement est  $p_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$  car il y a remise et par suite les tirages sont indépendants.

et par suite ( $X = 2k$ ) est la **réunion des évènements précédents incompatibles**.

$$\begin{aligned}
 P(X = 2k) &= p_1 + p_2 \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \\
 &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \frac{9}{16} + \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \frac{1}{16} \\
 &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16}\right) \\
 &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

**Conclusion** : Pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $P(X = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$ .

3- Décrire l'événement ( $X = 5$ ) , puis l'événement ( $X = 2k + 1$ ) pour tout entier  $k \geq 1$  et montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $P(X = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16}\right)^k$

( $X = 5$ ) signifie qu'au cinquième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur :

- ⇒ soit 2 rouges et par suite, on a tiré une blanche au premier tirage puis une rouge puis une blanche .
- ⇒ soit 2 blanches et par suite, on a tiré une rouge au premier tirage puis une blanche puis une rouge .

et par suite ( $X = 5$ ) est la **réunion des évènements incompatibles** ( $B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5$ ) et ( $R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap B_5$ )

pour tout entier  $k \geq 1$

$(X = 2k + 1)$  signifie qu'au  $2k + 1$ -ième tirage, on a obtenu deux boules de même couleur :

soit 2 rouges et par suite le tirage sera :

|         |       |       |  |  |  |  |            |            |          |            |
|---------|-------|-------|--|--|--|--|------------|------------|----------|------------|
| boules  | $B_1$ | $R_2$ |  |  |  |  | $R_{2k-2}$ | $B_{2k-1}$ | $R_{2k}$ | $R_{2k+1}$ |
| tirages | 1     | 2     |  |  |  |  | $2k-2$     | $2k-1$     | $2k$     | $2k+1$     |

Donc on a alternance de boules rouges et blanches durant  $2k-1$  tirages en débutant par une blanche et par suite, on aura une boule blanche de plus c'est à dire  $k$  boules blanches tirées et  $k-1$  boules rouges tirées

donc dans ce cas, on a tiré  $k$  boules blanches et  $k-1+2=k+1$  boules rouges

Donc la probabilité de cet événement est  $p_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$  car il y a remise et par suite les tirages sont indépendants.

soit 2 blanches et par suite le tirage sera :

|         |       |       |  |  |  |  |            |            |          |            |
|---------|-------|-------|--|--|--|--|------------|------------|----------|------------|
| boules  | $R_1$ | $B_2$ |  |  |  |  | $B_{2k-2}$ | $R_{2k-1}$ | $B_{2k}$ | $B_{2k+1}$ |
| tirages | 1     | 2     |  |  |  |  | $2k-2$     | $2k-1$     | $2k$     | $2k+1$     |

Donc on a alternance de boules rouges et blanches durant  $2k-1$  tirages en débutant par une rouge et par suite on aura une boule rouge de plus c'est à dire  $k$  boules rouges tirées et  $k-1$  boules blanches tirées

donc dans ce cas, on a tiré  $k$  boules rouges et  $k-1+2=k+1$  boules blanches

Donc la probabilité de cet événement est  $p_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$  car il y a remise et par suite les tirages sont indépendants.

et par suite  $(X = 2k + 1)$  est la **réunion des évènements précédents incompatibles**.

$$\begin{aligned}
 P(X = 2k + 1) &= p_1 + p_2 \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \\
 &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^1 \\
 &= \left(\frac{3}{16}\right)^k \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{3}{16}\right)^k
 \end{aligned}$$

**Conclusion** : Pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $P(X = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16}\right)^k$ .

4- Calculer les sommes  $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$  et  $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1)$ . Vérifier que  $S_1 + S_2 = 1$ .

sous réserve de convergence

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{5}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \underset{n=k-1}{=} \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n$$

$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{16}\right)^n$  est une série géométrique convergente car  $-1 < \frac{3}{16} < 1$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{16}\right)} = \frac{16}{13} \quad \text{car } \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ si } -1 < x < 1$$

$$\textbf{Conclusion : } S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) = \frac{5}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n = \frac{5}{8} \times \frac{16}{13} = \frac{10}{13}.$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \stackrel{n=k-1}{=} \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n$$

$$\text{et on a vu que } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n = \frac{16}{13}$$

$$\textbf{Conclusion : } S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k+1) = \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n = \frac{3}{16} \times \frac{16}{13} = \frac{3}{13}$$

$$\text{et on a } S_1 + S_2 = \frac{10}{13} + \frac{3}{13} = 1$$

5- Calculer l'espérance de X. On rappelle que  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$  si  $-1 < x < 1$ .

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$$

Il faut distinguer les pairs et les impairs ainsi on a sous réserve de convergence

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kP(X=2k) + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)P(X=2k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2kP(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{10}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$

$\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$  est une série convergente comme dérivée de la série géométrique et  $-1 < \frac{3}{16} < 1$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{16}\right)^2} = \frac{16^2}{13^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2kP(X=2k) = \frac{5}{4} \times \frac{16^2}{13^2} = \frac{5 \times 16 \times 4 \times 4}{4 \times 13^2} = \frac{320}{169}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)P(X=2k+1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) \left(\frac{3}{16}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \left(\frac{3}{16}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k \\
&= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k \\
&= 2 \times \frac{3}{16} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k \\
&= 2 \times \frac{3}{16} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} + S_1 \\
&= 2 \times \frac{3}{16} \times \frac{16^2}{13^2} + \frac{3}{13} \text{ car } \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{16^2}{13^2} \\
&= \frac{616+313}{169} \\
&= \frac{135}{169} \\
\sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)P(X=2k+1) &= \frac{135}{169}
\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $E(X)$  existe et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kP(X=2k) + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)P(X=2k+1) = \frac{320}{169} + \frac{135}{169} = \frac{455}{169} = \frac{35 \times 13}{13 \times 13} = \frac{35}{13}$$

### **Exercice 2:ESCP 2012**

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**1- a) Calculer**  $\int_0^1 f_n(t) dt$

$t \mapsto n(1-t)^{n-1}$  est continue sur  $[0;1]$  comme composée de fonctions continues donc admet des primitives

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \left[ -n \frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^1 = \left[ -(1-t)^n \right]_0^1 = -0 - (-1) = 1$$

**Conclusion :**  $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$

b) Montrer que la fonction  $f_n$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

$t \mapsto 0$  est définie, continue et positive sur  $\mathbb{R}$  comme constante donc sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]1; +\infty[$

$t \mapsto n(1-t)^{n-1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0; 1]$  comme composée de fonctions continues

De plus  $\forall t \in [0; 1]$ ,  $1-t \geq 0$  et  $n > 0$  donc  $n(1-t)^{n-1} \geq 0$

$\int_{-\infty}^0 f_n(t) dt$  converge et vaut 0 car  $\forall t \in ]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$

$\int_0^1 f_n(t) dt = 1$  d'après la question précédente

$\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$  converge et vaut 0 car  $\forall t \in ]1; +\infty[$ ,  $f(t) = 0$

donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1$

### Conclusion :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut être en 0 et en 1

$f$  est positive sur  $\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Donc  $f$  est une densité de probabilité

On note  $X_n$  une variable aléatoire admettant  $f_n$  comme densité et on désigne par  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$ .

2- a) Vérifier que l'on a :  $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Si  $x < 0$ ,  $F(x) = 0$  car  $\forall t \in \mathbb{R}^-$ ,  $f(t) = 0$

Si  $0 \leq x \leq 1$ ;  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \left[ -(1-t)^n \right]_0^x = 1 - (1-x)^n$

Si  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1$

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) On considère l'équation  $F_n(x) = \frac{1}{2}$ . Montrer que cette équation admet une unique solution, notée  $M_n$ , que l'on calculera en fonction de  $n$ .

$0 \neq \frac{1}{2}$  et  $1 \neq \frac{1}{2}$  donc l'équation  $F_n(x) = \frac{1}{2}$  ne peut être résolue que si  $x \in [0; 1]$

de  $1 - (1-x)^n = \frac{1}{2}$

il vient  $(1-x)^n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Deux méthodes pour résoudre cette équation

### Méthode 1 : utilisation de ln et exp

1 n'est pas solution de l'équation car  $(1-1)^n \neq \frac{1}{2}$

$$\ln((1-x)^n) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } \forall x \in [0;1[, (1-x)^n > 0$$

$$n \ln(1-x) = -\ln 2$$

$$\ln(1-x) = \frac{-\ln 2}{n} \text{ car } n \neq 0$$

$$1-x = e^{\frac{-\ln 2}{n}}$$

$$x = 1 - e^{\frac{-\ln 2}{n}}$$



beaucoup pense que la question est terminée. Cependant, on a résolu cette équation avec la condition  $x \in [0;1[$ . Reste à vérifier.

$$\forall n \geq 2, \frac{-\ln 2}{n} \leq 0 \text{ donc } e^{\frac{-\ln 2}{n}} \leq 1 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{de plus } n \geq 2 \text{ alors } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{par suite } \frac{-\ln 2}{n} \geq \frac{-\ln 2}{2} \text{ car } -\ln 2 < 0$$

$$e^{\frac{-\ln 2}{n}} \geq e^{\frac{-\ln 2}{2}} \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{or } e^{\frac{-\ln 2}{2}} = (e^{\ln 2})^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{d'où } e^{\frac{-\ln 2}{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{par suite } -e^{\frac{-\ln 2}{n}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } 1 - e^{\frac{-\ln 2}{n}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

donc  $0 \leq x < 1$

**Conclusion :** L'équation  $F_n(x) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution  $M_n = 1 - e^{\frac{-\ln 2}{n}} \in [0;1[$

Remarque :  $e^{\frac{-\ln 2}{n}} = 2^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

### Méthode 2 : utilisation de la racine n<sup>ième</sup>

$$(1-x)^n = \frac{1}{2}$$

$$1-x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$$x = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

attention, il faut vérifier que  $0 \leq x \leq 1$

c) Étudier la convexité de la fonction  $F_n$  sur l'intervalle  $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1], F_n(x) = 1 - (1-x)^n$$

$F_n$  est dérivable sur  $[0;1]$  comme composée de fonction dérivables

$$\forall x \in [0,1], F'_n(x) = -(n)(-1)(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}$$

$F'_n$  est dérivable sur  $[0;1]$  comme composée de fonction dérivables

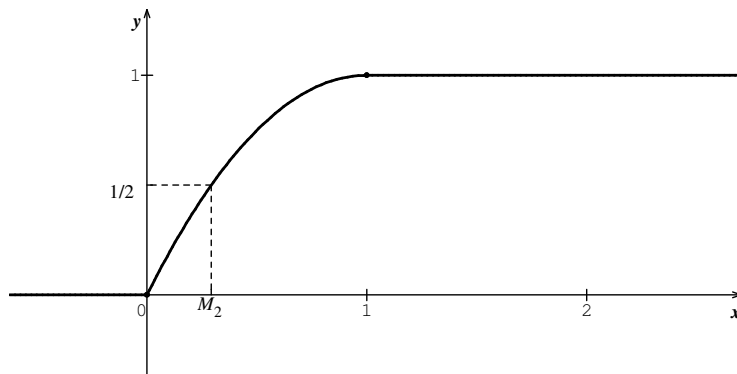
$$\forall x \in [0,1], F''_n(x) = n(-1)(n-1)(1-x)^{n-2} = -n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

$$\forall x \in [0;1], \forall n \geq 2, -n(n-1) < 0 \text{ et } \forall x \in [0;1] > 0 \text{ donc } F''_n(x) < 0$$

**Conclusion :  $F_n$  est concave sur  $[0;1]$**

d) Tracer la courbe représentative de  $F_2$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Placer le réel  $M_2$  sur ce graphique.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 = -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et } M_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$



3- a) On note  $E(X_n)$  l'espérance de  $X_n$ . Montrer que  $E(X_n) = \frac{1}{n+1}$

$$\int_{-\infty}^0 tf(t)dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^0 tf(t)dt = 0 \text{ car } \forall t \in ]-\infty; 0[, f(t) = 0$$

$$\int_1^{+\infty} tf(t)dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} tf(t)dt = 0 \text{ car } \forall t \in ]1; +\infty[, f(t) = 0$$

$$\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 nt(1-t)^{n-1}dt$$

On pose

$$u(t) = t$$

$$u'(t) = 1$$

$$v'(t) = n(1-t)^{n-1}$$

$$v(t) = -n \frac{(1-t)^n}{n} = -(1-t)^n$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0;1]$ .

La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 tf(t)dt = \left[ -t(1-t)^n \right]_0^1 - \int_0^1 (-(1-t)^n) dt = 0 - \left[ \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = -\left(0 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

**Conclusion :**

$$E(X) \text{ existe et } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt + \int_1^{+\infty} tf(t)dt = 0 + \frac{1}{n+1} + 0 = \frac{1}{n+1}$$

**b) Calculer la variance  $V(X_n)$  de  $X_n$  en fonction de  $n$ .**

$$\int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt \text{ converge et vaut } 0 \text{ car } \forall t \in ]-\infty; 0[, f(t)=0$$

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)dt \text{ converge et vaut } 0 \text{ car } \forall t \in ]1; +\infty[, f(t)=0$$

$$\int_0^1 t^2 f(t)dt = \int_0^1 nt^2(1-t)^{n-1}dt$$

On pose

$$u(t) = t^2$$

$$u'(t) = 2t$$

$$v'(t) = n(1-t)^{n-1}$$

$$v(t) = -n \frac{(1-t)^n}{n} = -(1-t)^n$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0;1]$ .

La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 t^2 f(t)dt = \left[ -t^2(1-t)^n \right]_0^1 + 2 \int_0^1 (t(1-t)^n) dt = 0 + \frac{2}{n+1} E(X_{n+1}) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{car } \int_0^1 (t(1-t)^n) dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 ((n+1)t(1-t)^n) dt = \frac{1}{n+1} E(X_{n+1})$$

**Conclusion :**

$$E(X^2) \text{ existe et } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt + \int_0^1 t^2 f(t)dt + \int_1^{+\infty} t^2 f(t)dt = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{2(n+1) - (n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

**4-** On pose  $Y_n = -\ln(1-X_n)$  et on admet que  $Y_n$  est une variable aléatoire à densité.

On note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$

**a) Exprimer pour tout  $x$  réel,  $G_n(x)$  en fonction de  $x$  et de  $n$ .**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) &= P(-\ln(1-X_n) \leq x) \\ &= P(\ln(1-X_n) \geq -x) \\ &= P(1-X_n \geq e^{-x}) \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(X_n \leq 1 - e^{-x}) \\ &= F_n(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 - e^{-x} < 0 &\Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

alors  $G_n(x) = 0$

Si  $0 \leq 1 - e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$  alors  $G_n(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-x}))^n = 1 - e^{-nx}$

**Conclusion** :  $\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Remarque :  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq 1$

**b) Reconnaître la loi de  $Y_n$**

On reconnaît  $G_n$  comme fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = n$

**Conclusion** :  $Y_n$  suit  $\mathcal{E}(n)$