

DEVOIR N°04
(A rendre le Jeudi 30 Septembre)

Exercice 1 :

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 20 boules dont une rouge et 19 blanches. L'urne $\mathcal{U}_2$ contient 20 boules dont 3 rouges et 17 blanches.

On désigne par "partie" le protocole suivant : On choisit une urne de manière équiprobable, puis on tire une boule de cette urne et on note sa couleur, enfin on remet la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

- 1- Ici on effectue une seule partie et on s'intéresse à l'évènement R : " la boule tirée est rouge" .
 - a) Montrer que $P(R) = \frac{1}{10}$.
 - b) Supposons avoir tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathcal{U}_1$?
- 2- Dans cette question, le joueur effectue non pas une mais 40 parties.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il a obtenu la couleur rouge au cours de ces 40 parties.

 - a) Déterminer la loi de X . On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
 - b) En moyenne, combien de fois le joueur obtiendra-t-il la couleur rouge en 40 parties ?
 - c) On considère que l'on peut approcher X par une variable Z qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Justifier que le paramètre de cette loi est $\lambda=4$. En utilisant cette approximation et en vous aidant de la table fournie, déterminer une valeur approchée de la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties.
- 3- Dans cette question, le joueur répète les parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne la couleur rouge pour la 1^{ère} fois.

Soit Y le rang de la partie où il obtient pour la 1^{ère} fois la couleur rouge.

 - a) Déterminer la loi de Y . On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
 - b) Préciser son espérance et sa variance.

Table de la loi de Poisson de paramètre 4 :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Z=k)$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	0,104

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 1 + x$

- 1- a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$
- b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
- c) Calculer $\int_0^1 g(x)dx$ puis interpréter ce résultat.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 2- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$
- c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- 3- a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
- b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2.
- 4- Montrer que la dérivée seconde de f vérifie pour tout réel x la relation : $f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$
Étudier la convexité de f .
- 5- Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et D .