

DEVOIR N°05

(A rendre le Jeudi 7 Octobre)

Exercice 1 :

PARTIE I: Un jeu en ligne.

La société Lehasard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H , V , D , et N par :

- ☐ H : « les trois jetons sont alignés horizontalement » .
- ☐ V : « les trois jetons sont alignés verticalement » .
- ☐ D : « les trois jetons sont alignés en diagonale » .
- ☐ N : « les trois jetons ne sont pas alignés » .

1- Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.

2- Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H , V , D .

3- En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à : $P(N) = \frac{19}{21}$

On donne $\frac{19}{21} \approx 0,9048$

4- La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance.

Déterminer la loi de Z_i et calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$.

b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II: Cas de joueurs invétérés.

1- Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.

b) Indiquer l'espérance et la variance de X .

c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X .

2- Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \approx -0,1$)

3- Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.

a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .

b) Indiquer l'espérance et la variance de Y .

c) Pour tout entier naturel k ; montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule : $p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$

Exercice 2 :

- 1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$
- a) Vérifier que , pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x}$
- b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
- 2- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
- 3- En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln(x) dx$
- On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$, avec p et q rationnels

Exercice 3 :

Soient (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$

- 1- Calculer les 4 premiers termes.
- 2- Écrire un script `SCILAB` qui demande la valeur de n et qui affiche la valeur de u_n .
- 3- Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.
- 4- Montrer que la suite est décroissante (u_n) . Que peut-on en déduire
- 5- On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour $n > 0$
- a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
- b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- c) Écrire l'expression de u_n en fonction de n .