

DEVOIR N°07
(A rendre le Jeudi 25 Novembre)

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

- 1- Étudier les variations de f .
- 2- Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

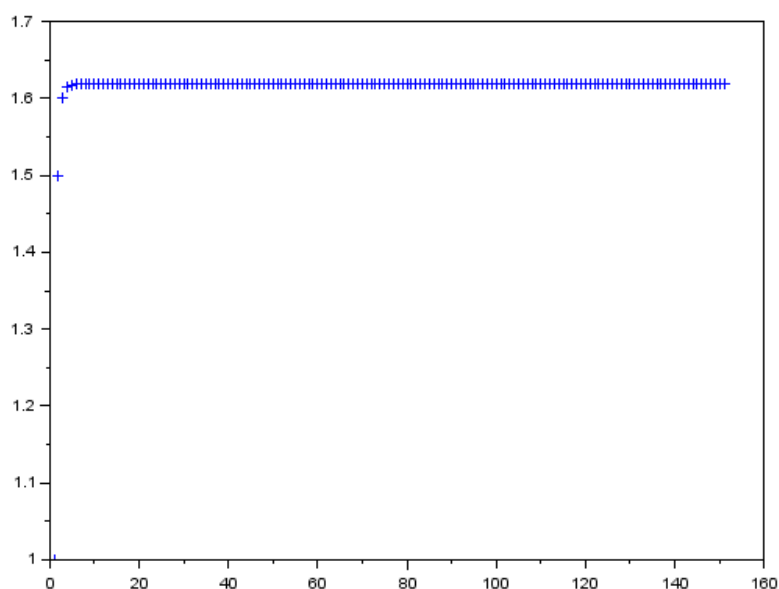
(u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- 3- Compléter le programme `scilab` qui demande la valeur de n à l'opérateur puis qui permet de tracer les n termes de la suite.

```
function y=f(x)
.....
endfunction

n=.....
u=
u(1)=.....
for .....
    u(i).....,
end
plot(....., "+")
```

Voici le résultat du programme avec $n = 150$



- 3- À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ? (On ne demande pas le calcul de l'éventuelle limite).
- 4- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $1 \leq u_n \leq 2$
- 5- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
- 6- Montrer que (u_n) est convergente et déterminer la limite.

Exercice 2

On note : $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- 1- (a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1} .
(b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées A, B et C.

On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité B.

On notera A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement: " le client choisit l'activité A le jour n (respectivement B, C) et on notera a_n (respectivement b_n , c_n) sa probabilité.

On définit également la matrice U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

- 2- (a) Par une formule des probabilités totales, montrer que :

pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = MU_n$

- (b) En utilisant la relation établie en 1.(b) , en déduire par récurrence que,

pour tout entier naturel n non nul : $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 3- En déduire que pour tout entier naturel n non nul , $\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$