

DEVOIR N°08
(A rendre le Jeudi 2 Décembre)

Exercice 1:

On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On considère également la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$

1. Inverse de P . Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calcul de A^n . On pose $B = P^{-1}AP$
 - (a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).
 - (b) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n .
 - (c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, A^n = PB^nP^{-1}$ puis donner les quatre coefficients de la matrice A^n .
3. Convergence de la suite. $(u_n)_{n \geq 0}$
 - (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.
 - (b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
 - (c) Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
 - (d) Montrer que $L = \frac{3L+1}{L+3}$, résoudre cette équation puis déterminer L .
4. Calcul de u_n et de sa limite.

Pour tout entier n , on considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

On admettra que : $\forall n \geq 0, a_n > 0$ et $b_n > 0$.

- (a) Prouver par récurrence que : $\forall n \geq 0, u_n = \frac{a_n}{b_n}$.
- (b) Posons : $\forall n \geq 0, U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de A et U_n puis donner sans démonstration l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0 .
- (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$

Exercice 2:

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.

Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : *blanc, rouge, rouge* le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3 les événements B_k : « obtenir une boule blanche au k -ème tirage » et R_k : « obtenir une boule rouge au k -ème tirage ».

- 1- Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est à dire que X_2 est égal à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égal à 0 sinon.

a) Justifier que $(X_2=1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2=1)$

b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

- 2- Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.

a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2 .

b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer G en fonction de X_2 et X_3 . En déduire $E(G)$.

- 3- a) Exprimer l'événement $(X_2=1) \cap (X_3=1)$ en fonction de B_1, B_2, B_3 et R_1, R_2, R_3 .

En déduire que $P((X_2=1) \cap (X_3=1)) = \frac{2}{9}$

b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3)

$X_2 \backslash X_3$	0	1
0		
1		$\frac{2}{9}$

En déduire que $\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$

- 4- Calculer $V(G)$.