

DEVOIR N°09
(A rendre le Jeudi 9 Décembre)

Exercice 1:

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A : Calcul de la puissance n -ième de A .

1- Calculer le produit matriciel $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ La matrice A est-elle inversible?

2- Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$

3- Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases}$$

Donner a_1 et b_1

4- Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.

En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$ puis donner la nature de (b_n)

5- Exprimer alors b_n et a_n en fonction de n .

Partie B : Étude de la loi d'une variable aléatoire X_n

Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0, C_1, C_2 selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0 , à l'instant $n+1$, il est en C_1
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^*$, le point lumineux est en C_1 , à l'instant $n+1$, il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ le point lumineux est en C_2 , à l'instant $n+1$, il est en C_1

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i , pour $i \in \{0, 1, 2\}$

1- On note U_n la matrice: $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n=i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n=i)$

Préciser U_0 et U_1 .

- 2- Montrer que : $U_{n+1} = A U_n$
- 3- En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$
- 4- a) Écrire un programme `Scilab` qui, étant donné un entier naturel n , calcule le vecteur U_n .
b) Le tester pour différentes valeurs de n . Que remarque-t-on ?
- 5- Préciser U_2 , puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$
- 6- En déduire les probabilités $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ en fonction de n , ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.
- 7- Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n .

Exercice 2:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

- 1- On définit pour tout x de $[0,1]$, la fonction f par $f(x) = \ln(x^2+1)$
 - a) Calculer pour tout x de $[0,1]$, $f'(x)$.
 - b) En déduire la valeur de J_1
- 2- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$
b) Étudier la convergence de (J_n)
- 3- a) En intégrant par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$
b) Étudier la convergence de (I_n)