

DEVOIR N°11
(A rendre le Jeudi 13 Janvier)

Exercice 1 :

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0=0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

- 1- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

- 2- a) Compléter le programme scilab, qui renvoie la valeur de u_n

```
n=input('valeur de n')
u=zeros(.....)
u(1)=.....
for k=.....
    u(k)= .....
end
disp('u'+string(n)+'=' +string(u(...)))
```

- b) En déduire un programme scilab qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$
- 3- Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$
 - a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k
 - b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$
 - c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$

Exercice 2:

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les

$$\text{relations de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1- Puissances successives de la matrice A

- a) Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
- b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A . Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
- c) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

d) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction des matrices P , D et P^{-1} .

e) Exprimer A^n en fonction de P , P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

f) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

2- Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

a) Vérifier que l'on a la relation: $C = AC + B$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

c) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$

d) En déduire les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$