

DEVOIR N°12
(A rendre le Jeudi 20 Janvier)

Exercice 1 :

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1- a) Calculer A^3 . Vérifier que $A^3 = 4A$.
 b) En déduire que les valeurs propres que A peut avoir sont : 0, 2 et -2.
 c) On considère les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 Montrer que X , Y et Z sont vecteurs propres de A . Quelles sont leurs valeurs propres associées?
 d) Justifier, en utilisant les questions précédentes, que $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2- a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
 b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n P = P D^n$.
 c) Donner D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^{n+1} & -(-2)^n \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

- 3- On considère les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers terme $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :
- $$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + 2b_n \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier n .

- a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = A U_n$
 b) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de a_{10} :

```
A=.....
U=.....
for i=.....
    =.....
end
disp(.....)
```

- c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = A^n U_0$.
 d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations : $a_n = -2^n$, $b_n = 0$ et $c_n = 2^n$.

Exercice 2 :

Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche. On désigne alors par X la variable

aléatoire égale au nombre total de boules prélevées. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$. Le but de l'exercice est de calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X , de deux manières différentes.

Partie 1 : première méthode

1- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

(b) Calculer la valeur de $P([X = 1])$.

(c) Montrer que $P([X = 2]) = \frac{5}{33}$.

(d) Calculer $P([X = 3])$

2- Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.

3- Calculer $E(X^2)$ et en déduire que $V(X) = \frac{65}{363}$

Partie 2: deuxième méthode

Dans cette partie, on suppose que les deux boules noires sont marquées N et N' . On note Y (respectivement Y') la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire marquée N (respectivement N') est prélevée avant l'apparition d'une boule blanche, et qui vaut 0 sinon.

Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq 2$, on note N_i (respectivement N'_i) l'événement: « la boule noire marquée N (respectivement N') est obtenue au i -ème tirage ».

1- (a) Exprimer l'événement $[Y = 1]$ en fonction de N_1, N'_1, N_2 .

(b) En déduire que la variable aléatoire Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{11}$

(c) Donner la loi de la variable aléatoire Y' .

2- Justifier que : $X = 1 + Y + Y'$.

3- Déduire de ce qui précède la valeur de $E(X)$.

4- (a) Exprimer l'événement $([Y = 1] \cap [Y' = 1])$ à l'aide des événements N_1, N'_1 .

(b) En déduire la valeur de $P([Y = 1] \cap [Y' = 1])$

(c) Calculer la valeur de la covariance de Y et Y' , notée $\text{cov}(Y, Y')$.

(d) Utiliser alors le résultat de la question 2 de cette partie pour déterminer $V(X)$, et retrouver ainsi le résultat de la question 3 de la partie 1.