

DEVOIR N°13
(A rendre le Jeudi 27 Janvier)

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-4\ln(x)$

- 1- Étudier le sens de variation de g , et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
- 2- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1+\ln(x)}{x}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

- 3- Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
- 4- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 5- Montrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
- 6- Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D) .
On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
- 7- Étudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
- 8- (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{2\ln(x)-1}{x^3}$
(b) Étudier la convexité de f . La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?
- 9- On donne:

$$\frac{1}{e} \approx 0,4 \quad \sqrt{e} \approx 1,6 \quad f(\sqrt{e}) \approx 1,3 \quad f'(\sqrt{e}) \approx 0,1$$

Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II.

- 1- Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=(\ln(x))^2$
- 2- En déduire que $\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$
- 3- Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\begin{cases} \frac{8}{e^2+11}f(x) & \text{si } x \in [1,e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
est une densité de probabilité.
- 4- Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.
(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln(x)dx = 1$
(b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.