

DEVOIR N°14
(A rendre le Jeudi 3 Février)

Exercice 1:

Les parties A, B et C sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est la suivante : une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

Pour les parties B et C, on pourra utiliser les événements R_k : " le k -ième tirage donne une boule rouge " et B_k : " le k -ième tirage donne une boule blanche ", pour k entier naturel non nul.

Partie A

- 1- On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
- 2- On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de 2 boules rouges.
Soit N la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
 - b) Reconnaître la loi de N . On précisera $P(N = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
 - c) En déduire son espérance et sa variance.
 - d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Partie B

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

- 1- Quelles sont les valeurs prises par Y ?
- 2- Décrire l'événement $(Y = 2)$ et calculer $P(Y = 2)$.
- 3- Déterminer la loi de Y , son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.
- 4- Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer Z en fonction de Y .
En déduire la loi de Z , son espérance $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Partie C

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors $X = 6$.

- 1- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2- Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
- 3- Décrire l'événement $(X = 4)$, puis l'événement $(X = 2k)$ pour tout entier $k \geq 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$.
- 4- Décrire l'événement $(X = 5)$, puis l'événement $(X = 2k + 1)$ pour tout entier $k \geq 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16} \right)^k$.
- 5- Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1)$. Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.

- 6- Calculer l'espérance de X . On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $-1 < x < 1$.

Exercice 2:

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1- a) Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$

b) Montrer que la fonction f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On note X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité et on désigne par F_n la fonction de répartition de X_n

- 2- a) Vérifier que l'on a : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) On considère l'équation $F_n(x) = \frac{1}{2}$. Montrer que cette équation admet une unique solution, notée M_n , que l'on calculera en fonction de n .

c) Étudier la convexité de la fonction F_n sur l'intervalle $[0 ; 1]$

d) Tracer la courbe représentative de F_2 dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Placer le réel M_2 sur ce graphique.

- 3- a) On note $E(X_n)$ l'espérance de X_n . Montrer que $E(X_n) = \frac{1}{n+1}$

b) Calculer la variance $V(X_n)$ de X_n en fonction de n .

- 4- On pose $Y_n = -\ln(1 - X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

On note G_n la fonction de répartition de Y_n

a) Exprimer pour tout x réel, $G_n(x)$ en fonction de x et de n .

b) Reconnaître la loi de Y_n