

Devoir maison : dérivations et limites - correction

Exercice 1: Un peu de musculation

1. Donner la dérivée, la tangente en 1, la limite en 0 et en $+\infty$ de la fonction :

$$f : \begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x + \ln(x))e^{-x} \end{cases}$$

2. Donner la dérivée, la tangente en 1, la limite en 0 et en $+\infty$ de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{xe^{-x}}{(1+x)^2} \end{cases}$$

3. Donner le domaine de définition, la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

4. Donner la dérivée, la tangente en -1 , la limite en 0 et en $+\infty$ de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{(2x+3)^2} \end{cases}$$

5. Donner le domaine de définition, la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.

6. Donner le domaine de définition, la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

7. Tracer la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (domaine de définition, dérivée, tableau de variation avec calcul des limites).

8. Étudier la limite en 0^+ et en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$.

9. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^{x^2} - e^x - x$.

10. Calculer la limite en 1^- et en 1^+ de la fonction $x \mapsto \frac{x^2+x-2}{1-x^2}$.

11. Calculer la limite en 0 et en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^4+x+1}{x^2+2}$.

Correction :

1. La fonction f est dérivable sur $D_f =]0; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur D_f . Pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} - (x + \ln(x))e^{-x} = e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x} - x - \ln(x)\right)$$

Pour calculer la tangente en 1 on calcule $f(1)$ et $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{e} \\ f'(1) &= e^{-1}(1 + 1 - 1 - 0) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

donc la tangente en 1 est donnée par :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{e}(x - 1) + \frac{1}{e} = \frac{x}{e}$$

Pour la limite en 0 on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

En $+\infty$ le terme entre parenthèse $(x + \ln(x))$ tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0. Il y a donc une compétition et il faut utiliser les croissances comparées. On développe : $(x + \ln(x))e^{-x} = xe^{-x} + \ln(x)e^{-x}$. Ainsi :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ par croissance comparée} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)e^{-x} = 0 \text{ par croissance comparée} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. La fonction f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D_f . Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(1+x)^2 - xe^{-x}2(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(1+x) - 2xe^{-x}}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^{-x} + xe^{-x} - xe^{-x} - x^2e^{-x} - 2xe^{-x}}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^{-x} - x^2e^{-x} - 2xe^{-x}}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^{-x}(1 - x^2 - 2x)}{(1+x)^3} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x - 1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Pour la tangente en 1 on calcule $f(1)$ et $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{4e} \\ f'(1) &= \frac{-e^{-1}(1 + 2 - 1)}{(1+1)^3} = \frac{-2}{8e} = \frac{-1}{4e} \end{aligned}$$

donc la tangente en 1 est donnée par :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -\frac{1}{4e}(x - 1) + \frac{1}{4e} = \frac{-x}{4e} + \frac{1}{2e}$$

La fonction f est continue en 0 donc la limite en 0 est donnée par $f(0) = 0$. En $+\infty$ on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ par croissance comparée} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^2 = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Pour finir si on avait voulu calculer la limite en -1 :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} xe^{-x} = -e \\ \lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^2 = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

3. Soit $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > e^0 = 1 \text{ par stricte croissance de la fonction exponentielle} \end{cases}$$

Ainsi $D_f =]1; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur D_f par composition. Pour calculer f' on introduit la fonction $u(x) = \ln(x)$. Pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

Pour la limite en 1^+ on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+ \\ \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

et en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. La fonction f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D_f . Pour calculer la dérivée on pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = (2x+3)^2$ et $w(x) = 2x+3$. On a $u'(x) = 2x$ et

$$v'(x) = (w(x)^2)' = 2w'(x)w(x) = 2(2)(2x+3) = 4(2x+3)$$

Ainsi, pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{2x(2x+3)^2 - x^2 4(2x+3)}{(2x+3)^4} \\ &= \frac{2x(2x+3) - 4x^2}{(2x+3)^3} \\ &= \frac{6x}{(2x+3)^3} \end{aligned}$$

Pour calculer la tangente en -1 on calcul :

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-2+3)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$f'(-1) = \frac{-6}{(-2+3)^3} = -6$$

donc la tangente en -1 est donnée par :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -6(x+1) + 1 = -6x - 5$$

Pour la limite en 0 la fonction est continue en 0 donc la limite vaut $f(0) = 0$. En $+\infty$ il s'agit qu'un quotient de polynôme donc on regarde les termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(2x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

5. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Donc $D_f = [1; +\infty[$. Attention ici la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 donc on dérivra f sur $]1; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ par composition. On pose $u(x) = \ln(x)$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$f'(x) = (u(x)^{1/2})' = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^{1/2-1} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

La fonction f est continue en 1 (par composition de fonctions continue) donc la limite vaut $f(1) = 0$. En $+\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

6. Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$. Le domaine de définition est $D_f = [0; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - \sqrt{x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x(2x)}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$$

La fonction f est continue en 0 donc la limite vaut $f(0) = 0$. En $+\infty$ le numérateur et le dénominateur de la fonction tendent vers $+\infty$, il faut donc factoriser :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{x^{1/2-2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{-3/2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

donc :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-3/2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

7. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Pour étudier le signe de $\frac{x+1}{x+2}$ on fait un tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x+2}$	$+$	$-$	0	$+$

Ainsi $D_f =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$.

Attention : ici on ne peut pas toujours écrire $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$. Typiquement la formule de gauche a un sens lorsque $x = -3$ mais pas celle de droite. Pour cette raison on gardera toujours l'expression sous la forme $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ est dérivable sur D_f comme fraction rationnelle avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur D_f . Par composition la fonction f est donc dérivable sur $] -\infty; -2[\cup] -1; +\infty[$ (on enlève les endroits où le terme dans la racine s'annule car la fonction racine n'est pas dérivable en 0). Pour dériver f on introduit la fonction $u(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Pour tout $x \in] -\infty; -2[\cup] -1; +\infty[$:

$$u'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Ainsi pour tout $x \in] -\infty; -2[\cup] -1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} = \frac{1}{2(x+2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}$$

Puisque $(x+2)^2 \geq 0$ et $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \geq 0$ sur D_f on en déduit que f est croissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -1; +\infty[$ (**Attention : ne pas dire que la fonction est croissante sur D_f , elle est croissante sur chaque morceau de son domaine de définition**).

Au niveau des limites on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 \text{ on prend les termes de plus haut degré} \\ \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{u} = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

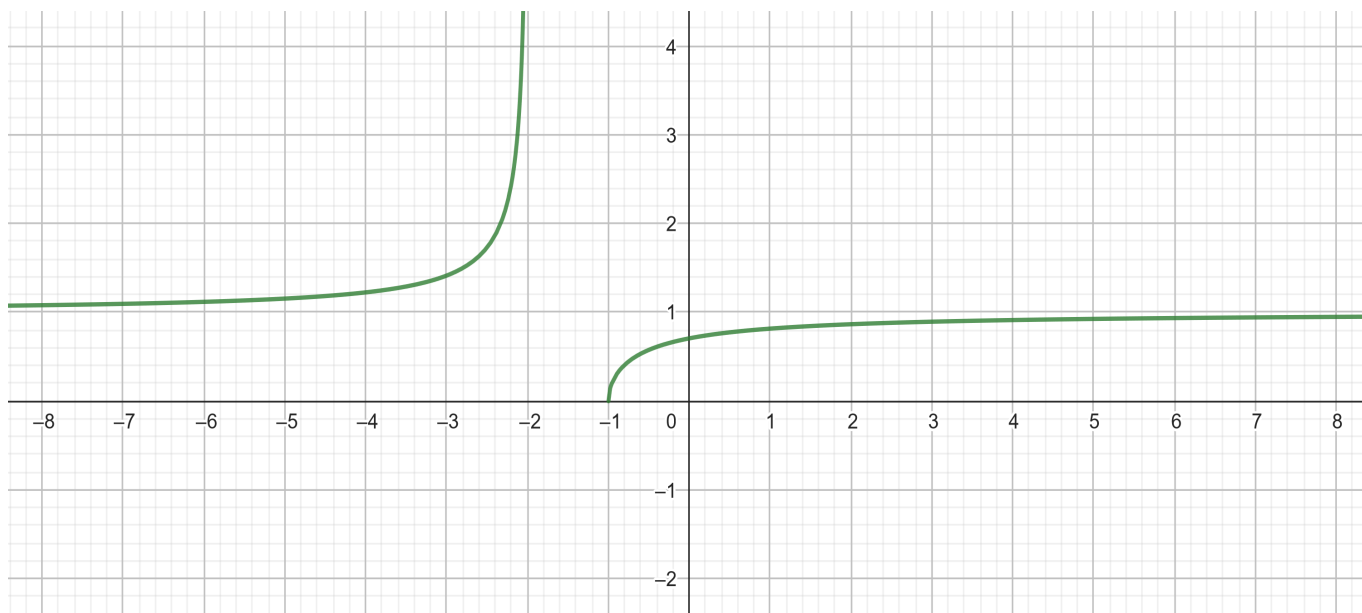
Le même raisonnement en $-\infty$ donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. En -2 on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} x + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} x + 2 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x+2} = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

Remarque 1. Toujours vérifier que les limites ont un sens. On a vu que la fonction était croissante donc obtenir $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ est impossible par exemple. Ici le résultat est cohérent.

La fonction f est continue en -1 donc la limite vaut $f(-1) = 0$. On peut maintenant donner le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$\text{signe}(f'(x))$	+	-	+	
$\text{var}(f(x))$	$1 \longrightarrow$	$+\infty$	$0 \longrightarrow$	1



8. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$. Ici en 0^+ il y a une compétition car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. On doit donc factoriser par le terme dominant qui est ici $\frac{1}{x}$:

$$\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (1 + x \ln(x))$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ limite de référence} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$ il n'y a pas de difficulté et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

9. Soit $f : x \mapsto e^{x^2} - e^x - x$. Ici aussi, en $+\infty$, il y a une compétition. On factorise par le terme dominant qui est ici e^{x^2} . On a :

$$f(x) = e^{x^2} \left(1 - e^{x-x^2} - \frac{x}{e^{x^2}} \right)$$

Le terme $\frac{x}{e^{x^2}}$ tend vers 0 par croissance comparée en $+\infty$. Si on veut se ramener à une croissance comparée standard on utilise la majoration suivante, pour tout $x > 1$:

$$e^{x^2} \geq e^x \text{ donc } \left| \frac{x}{e^{x^2}} \right| \leq \frac{x}{e^x} \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi par comparaison on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$. Pour le terme e^{x-x^2} on met x en facteur :

$$e^{x-x^2} = e^{x(1-x)}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-x) = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1-x)} = 0$$

Finalement :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{x-x^2} - \frac{x}{e^{x^2}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

10. La difficulté ici provient du fait que le numérateur et le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$. Il y a donc une compétition. On propose deux méthodes.

Méthode 1 : On sait que si 1 est une racine d'un polynôme P alors $(x - 1)$ divise P . On peut donc factoriser par $(x - 1)$ le numérateur et le dénominateur. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= (x - 1)(x + 2) \\ 1 - x^2 &= (1 - x)(1 + x) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{x + 2}{-(1 + x)}$$

On peut alors calculer la limite :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} -(1 + x) = -2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{3}{2}$$

La limite en 1^+ est identique, ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{3}{2}$.

Méthode 2 : Pour étudier une limite lorsque x tend vers un point $a \in \mathbb{R}^*$ on peut se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$ et en regardant la limite lorsque h tend vers 0.

On applique cette méthode, on pose $x = 1 + h$, la fonction f devient :

$$f(x) = f(1 + h) = \frac{(1 + h)^2 + (1 + h) - 2}{1 - (1 + h)^2} = \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h - 2}{1 - 1 - 2h - h^2} = \frac{h^2 + 3h}{-(h^2 + 2h)}$$

Méthode 0.1: Calculer la limite d'une fraction rationnelle en zéro

Pour calculer la limite d'une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en zéro ou P et Q sont deux polynômes on factorise par les termes de plus bas degré. Par exemple si on veut calculer la limite de $\frac{x^2 + x}{x^3 + 3x}$ en zéro on a :

$$\frac{x^2 + x}{x^3 + 3x} = \frac{x(x+1)}{x(3+x^2)} = \frac{1+x}{3+x^2}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 1+x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 3+x^2 = 3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 + 3x} = \frac{1}{3}$$

On obtient donc ici :

$$\frac{h^2 + 3h}{-(h^2 + 2h)} = \frac{h+3}{-(h+2)}$$

On calcul alors la limite lorsque h tend vers 0 et on retrouve la limite précédente :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+3}{-(h+2)} = -\frac{3}{2}.$$

11. Soit $f : x \mapsto \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + 2}$. La fonction f est continue en 0 comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en 0. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

En $+\infty$ on rappelle la méthode :

Méthode 0.2: Calculer la limite d'une fraction rationnelle en l'infinie

Pour calculer la limite d'une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $\pm\infty$ ou P et Q sont deux polynômes on regarde les termes de plus haut degré. Par exemple si on veut calculer la limite de $\frac{x^2 + x}{x^3 + 3x}$ en $+\infty$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ici on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$