

Problème :

La fin du XVI^e siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler...).

Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquaient des calculs compliqués sur de grands nombres. Les multiplications, divisions et extractions de racines étaient particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on chercha à construire des « tables numériques à deux colonnes », mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à **la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite**.

La première table de ce type fut publiée par l'Écossais John Neper en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait :

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	
22	
100	

Exemple de fonctionnement :

Dans la colonne de gauche, considérons les nombres 2, 3 et 6.

On observe que $2 \times 3 = 6$.

Dès lors, les nombres correspondants dans la colonne de droite vérifient :
 $0,69315 + 1,09861 = 1,79176$.

1. - Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ? De 22 ? De 56 ?
 - Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?
 - Quel nombre doit-on écrire en face de 1,5 ?
2. Pour désigner les nombres de la colonne de droite, on inventa le mot « logarithme », forgé à partir des deux mots grecs logos (rapport) et arithmos (nombre entier naturel). Ainsi, le nombre correspondant à un nombre a strictement positif est noté $\ln(a)$.

Que vaut $\ln(a \times b)$?

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes » (Laplace, 1749-1827).

Problème 2 :

1. Donner une fonction de référence, que l'on notera f , dont on ne peut pas donner de primitive en utilisant le tableau de primitives actuel du cours.
2. En utilisant Géogebra, et par calcul d'aire sous la courbe représentative de f , observer des valeurs de la primitive de f qui s'annule en 1. Conclure.

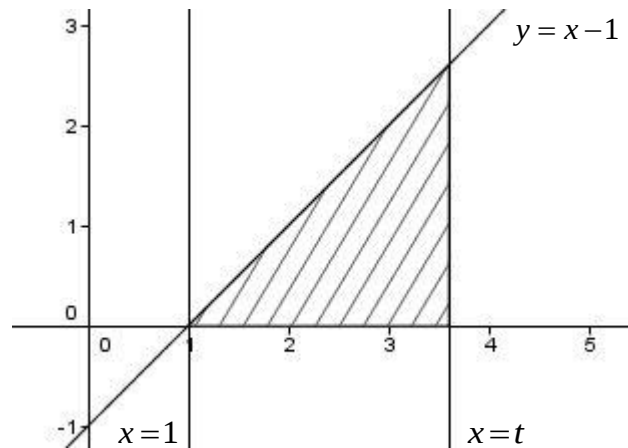
Un siècle plus tard, Newton et Leibniz découvrirent qu'en plus de ses propriétés pratiques, la fonction logarithme de Neper avait un intérêt théorique considérable.

On constata notamment qu'elle avait pour dérivée une fonction très simple : la fonction « inverse » ! Mieux : que cette propriété, jointe au fait que l'image de 1 est 0, suffisait à la définir.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t - 1$.

1. Déterminer la **primitive** F de f **qui** s'annule en 1.

2. On considère le graphique suivant :



a) Expliquer pourquoi $\int_1^t (x-1) dx = \frac{1}{2} \times (t-1) \times (t-1)$.

b) En déduire que $\int_1^t (x-1) dx = F(t)$ où F est la fonction définie à la question 1.

Question

Donner une fonction de référence dont on ne peut pas donner de primitive en utilisant le tableau de primitives actuel du cours.

Nous avons admis que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. De plus, le tableau des primitives donne toutes les primitives de x^n pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$. Or la fonction

$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ est une fonction continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Elle admet donc une primitive sur cet intervalle.

Observation de la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1

Un siècle plus tard, Newton et Leibniz découvrirent qu'en plus de ses propriétés pratiques, la fonction logarithme de Neper avait un intérêt théorique considérable.

On constata notamment qu'elle avait pour dérivée une fonction très simple : la fonction « inverse » ! Mieux : que cette propriété, jointe au fait que l'image de 1 est 0, suffisait à la définir.

Programme abordé :

- ★ Fonction logarithme népérien
- ★ Dérivée, limites, représentation graphique

Fonction logarithme népérien

I. Définition – Relation fonctionnelle

1. Définition

La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note $\ln$.

Conséquences immédiates :

- $\ln$ est définie sur $]0 ; +\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.
- $\ln 1 = 0$
- $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

2. Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , $\ln ab = \ln a + \ln b$ (1)

De cette relation on déduit d'autres relations comme par exemple : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$,

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ou encore $\ln a^n = n \ln a$

II. Étude des variations de $\ln$

1. Sens de variation. Signe

Soit $f(x) = \ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Or $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Tableau de variations. De plus $\ln 1 = 0$.

D'après le tableau de variation :

Pour tout x de $]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$.

Pour tout x de $]0 ; 1[$, $\ln x < 0$.

De plus :

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b ,

$\ln a = \ln b$ ssi $a = b$,

$\ln a \leq \ln b$ ssi $a \leq b$,

$\ln a < \ln b$ ssi $a < b$.

$\ln a$ et $\ln b$ sont rangés dans le même ordre que a et b .

2. Courbe représentative, limites

Tableau de variation définitif. Tableau de valeurs vu en introduction. Graphique.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

D'après le tableau de variation, il existe un seul nombre réel x_0 tel que $\ln x_0 = 1$.

On note e ce nombre.

Définition :

e est le nombre réel défini par $\ln e = 1$

SCILAB : $e = 2.71828$ arrondi à 10^{-5} près.

Pour tout nombre $n \in \mathbb{Z}$, $\ln e^n = n$.

Ainsi, $\ln e^2 = 2$; $\ln e^3 = 3$; $\ln e^{-1} = -1$; $\ln e^{-2} = -2$; $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$; $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$...

3. Dérivée des fonctions de la forme $\ln u$

Exemple :

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(3x+1)$.

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

★ Exercice

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^4 + 1)$.
2. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $I =]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

PLAN DE TRAVAIL

Fonction logarithme népérien

Partie I : le cours

Je dois :

- connaître les formules de simplification de $\ln$.
- savoir résoudre des équations ou des inéquations contenant $\ln$.
- savoir étudier des limites de fonctions définies à l'aide de $\ln$.
- savoir dériver et étudier les variations de fonctions définies avec $\ln$.

Partie II : l'entraînement

Mon parcours :

Vous pouvez aussi choisir les exercices comme vous le souhaitez pour ajuster votre parcours...

	Parcours bleu	Parcours vert	Parcours rouge
Simplification avec des ln	17.1 – 17.2		
Inéquations avec ln	17.3	17.4	
Limites avec ln	17.5	17.5.1.a – 17.5.2	
Dérivées et études de variations	17.6 – 17.7	17.6.8 – 17.6.9 17.8	17.6.10 – 17.9

Tableau de suivi (à compléter au fur et à mesure pour permettre un réinvestissement ultérieur) :

[illegible]

Fonction logarithme népérien
Exercices

Simplification d'expressions utilisant $\ln$

★ **Exercice 14.1**

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $A = \ln(8)$ 2. $B = \ln(2e^3)$ 3. $C = 2\ln(4) - \ln(4e^2)$

★ **Exercice 14.2**

Exprimer plus simplement les réels :

1. $\ln(e^{2x})$ 2. $\ln(2e^x)$

Inéquations utilisant $\ln$

★ **Exercice 14.3**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+3) > \ln 5$ 2. $\ln(x) > 1$ 3. $\ln(x) \leq 2$

★ **Exercice 14.4**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3^n \geq 10^6$ 2. $0,7^n \leq 10^{-4}$

Limites



★ **Exercice 14.5**

Calculer les limites suivantes :

1. *Opérations classiques (somme, produit, ...)* :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$

2. *Composition* : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

3. *Formes indéterminées* :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Dérivées et études des variations

★ Exercice 14.6

Pour chacune des fonctions suivantes :

- a) Déterminer la dérivée
- b) Étudier les variations



1. $f(x) = \ln(x) + x$
2. $f(x) = \ln(x) - x$
3. $f(x) = \ln(x) - 2x$
4. $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$
5. $f(x) = \ln(3x)$
6. $f(x) = \ln(-x)$
7. $f(x) = \ln(x-2)$
8. $f(x) = x \ln(x)$
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
10. $f(x) = x^2 + 1 - 2 \ln(x)$

★ Exercice 14.7

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x - x + 1$.

1. Étudier le sens de variation, puis le signe de g .
2. En déduire la position relative de $C_{\ln}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x - 1$.

★ Exercice 14.8

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0; +\infty[$.
4. T est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
 - a) Déterminer une équation réduite de T .
 - b) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2x - 3.$$

- c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

★ Exercice 14.9

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

1. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geq 0$.
2. Déterminer la limite de f en 0. Conjecturer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.