

Fonction logarithme népérien
Exercices

Simplification d'expressions utilisant $\ln$

★ **Exercice 14.1**

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $A = \ln(8)$ 2. $B = \ln(2e^3)$ 3. $C = 2\ln(4) - \ln(4e^2)$

Correction :



Rappel : $\ln(a^n) = n\ln(a)$

1. $A = \ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2).$



Rapports : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(e^x) = x$

2. $B = \ln(2e^3) = \ln(2) + \ln(e^3) = \ln(2) + 3.$

3. $C = 2\ln(4) - \ln(4e^2) = 2\ln(2^2) - (\ln(4) + \ln(e^2))$

$\Leftrightarrow C = 4\ln(2) - \ln(2^2) - \ln(e^2) = 4\ln(2) - 2\ln(2) - 2 = 2\ln(2) - 2$

★ **Exercice 14.2**

Exprimer plus simplement les réels :

1. $\ln(e^{2x})$ 2. $\ln(2e^x)$

Correction :

1. $\ln(e^{2x}) = 2x$

2. $\ln(2e^x) = \ln(2) + \ln(e^x) = \ln(2) + x$

Inéquations utilisant $\ln$

★ Exercice 14.3

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+3) > \ln 5$

2. $\ln(x) > 1$

3. $\ln(x) \leq 2$

Correction :



Rappel : $\ln(a) \leq \ln(b)$

$$\Leftrightarrow a \leq b$$

Le symbole « $\leq$ » peut être remplacé par « $<$ » ou « $\geq$ » ou « $>$ ».

1. $\ln(x+3) > \ln 5$

$$\Leftrightarrow x+3 > 5$$

$$\Leftrightarrow x > 5-3$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

2. $\ln(x) > 1$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x > e$$

3. $\ln(x) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(e^2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

★ Exercice 14.4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3^n \geq 10^6$

2. $0,7^n \leq 10^{-4}$

Correction :

1. $3^n \geq 10^6$

$$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^6)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(3) \geq 6 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(3)} \text{ car } \ln(3) > 0 \text{ (} \ln 3 \approx 1,1 \text{)}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 0,7^n \leq 10^{-4} \\
 \Leftrightarrow & \ln(0,7^n) \leq \ln(10^{-4}) \\
 \Leftrightarrow & n \ln(0,7) \leq -4 \ln(10) \\
 \Leftrightarrow & n \geq \frac{-4 \ln(10)}{\ln(0,7)} \text{ car } \ln(0,7) < 0
 \end{aligned}$$

Limites



★ Exercice 14.5

Calculer les limites suivantes :

1. Opérations classiques (somme, produit, ...) :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$$

$$2. \text{ Composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

3. Formes indéterminées :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Correction :

1. a)

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$$

b)

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

c)

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = -\infty \end{aligned} \right\} \text{ par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln x) = +\infty$$

d)

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{aligned} \right\} \text{ par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \end{array}$$

3. a)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty \end{array}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ est une limite du cours à connaître directement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

On peut la « retrouver » ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \quad (\text{explication : le « } +\infty \text{ » du bas l'emporte})$$

Dérivées et études des variations

★ Exercice 14.6

Pour chacune des fonctions suivantes :

a) Déterminer la dérivée

b) Étudier les variations



1. $f(x) = \ln(x) + x$
2. $f(x) = \ln(x) - x$
3. $f(x) = \ln(x) - 2x$
4. $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$
5. $f(x) = \ln(3x)$
6. $f(x) = \ln(-x)$
7. $f(x) = \ln(x-2)$
8. $f(x) = x \ln(x)$
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
10. $f(x) = x^2 + 1 - 2 \ln(x)$

Correction :

1. Étude complète de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) + x$.

★ **Limites :**

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned} \right\} \text{par somme de limites,} & \left. \begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned} \right\} \text{par somme de limites,} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) + x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + x) = +\infty \end{aligned}$$



Rappel : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.



Remarque : la technique du « point, point, accolade » est LA technique la plus importante des limites.

★ **Dérivée :**

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$



Rappel : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$ car $x \in]0 ; +\infty[$.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

2. Étude complète de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - x$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x) = -\infty \end{array}$$



Rappel : « $+\infty - \infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

★ Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$



Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». Il faut alors factoriser, c'est-à-dire réduire au même dénominateur.

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}.$$



Remarque : on peut maintenant étudier le signe des deux facteurs.

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0 ; +\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1 - x$.



Remarque : ici, il est possible de poser l'inéquation

$$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty \nearrow \begin{array}{c} -1 \\ \nwarrow \end{array} \searrow -\infty$		

$$f(1) = \ln(1) - 1 = -1.$$

3. Étude complète de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0 \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

★ Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}.$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0 ; +\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-2x$.

$$1-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$\begin{array}{ccc} & f\left(\frac{1}{2}\right) & \\ \nearrow & & \searrow \\ -\infty & & -\infty \end{array}$		

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\ln(2) - 1 \approx -1,7.$$

4. Étude complète de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$.

☆ Limites :

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty \end{array} \right. & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 \right) = -\infty \end{array} \right. \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2 = 0 \end{aligned}$$

☆ Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x}.$$



Remarque : ici, on a factorisé grâce à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Il aurait été possible de passer par Δ mais ça aurait été maladroit.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $1+x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.

$$1-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

$$f(1) = \ln(1) - \frac{1}{2} \times 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

5. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3x)$.

★ Ensemble de définition :



Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u > 0$.

$3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. f est donc définie sur $]0 ; +\infty[$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \text{par composée de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{par composée de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

★ Dérivée :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}.$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \text{ car } x \in]0 ; +\infty[.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

6. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(-x)$.

★ **Ensemble de définition :**



Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u > 0$.

$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. f est donc définie sur $] -\infty ; 0[$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \end{array}$$

★ **Dérivée :**

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) < 0 \text{ car } x \in] -\infty ; 0[.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $] -\infty ; 0[$:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

7. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x-2)$.

★ Ensemble de définition :



Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u > 0$.

$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. f est donc définie sur $]2; +\infty[$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0 \\ \bullet \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = +\infty \\ \bullet \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

★ Dérivée :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}. \text{ Donc } f'(x) = \frac{1}{x-2}.$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \text{ car } x > 2.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]2; +\infty[$:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

8. Étude complète de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x)$.

★ **Limites :**

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (c'est une limite du cours).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$



Rappel : « $0 \times \infty$ » est la seule forme indéterminée relative à la multiplication.

★ **Dérivée :**

$(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right) \times (x) = \ln x + 1.$$



Remarque : attention à bien reconnaître le produit « uv ». Ici, $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:



Remarque : ici, on pose directement l'inéquation.

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \ln x &> -1 \\ \Leftrightarrow x &> e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

9. Étude complète de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

★ Limites :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ par quotient de limites,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ } $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$



Rappel : « $\frac{\infty}{0} = \infty$ » et « $\frac{0}{\infty} = 0$ » ne sont pas des formes indéterminées.



Remarque : lorsqu'une limite comporte une « division par 0 », on doit faire attention au signe du dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées (c'est une limite du cours).}$$



Rappel : « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » sont les deux formes indéterminées relatives à la division.

★ Dérivée :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc : } f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \times x - (1) \times (\ln x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$



Remarque : attention à bien reconnaître le produit « $\frac{u}{v}$ ». Ici, $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x^2 > 0$ car $x > 0$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln x$.

$$\begin{aligned} 1 - \ln x &> 0 \\ \Leftrightarrow -\ln x &> -1 \\ \Leftrightarrow \ln x &< 1 \\ \Leftrightarrow x &< e \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

10. Étude complète de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1 - 2\ln(x)$.

☆ **Limites :**

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} -2\ln(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln(x) = -\infty$
- par somme de limites,
- par croissances comparées,
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

☆ **Dérivée :**

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $x+1 > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$. $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 2\ln(1) = 1 + 1 - 0 = 2$$

★ Exercice 14.7

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x - x + 1$.

1. Étudier le sens de variation, puis le signe de g .
2. En déduire la position relative de $C_{\ln}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x - 1$.

Correction :

1.

Remarque : pour les limites, il est plus simple d'écrire $g(x) = \ln x + (-x + 1)$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -x + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

★ Dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $g'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0; +\infty[$.
- $g'(x)$ est donc du signe de $1 - x$. $1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

On en déduit le signe de $g'(x)$ puis le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$		

$$g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0.$$

★ Signe de la fonction g :

D'après le tableau des variations de g , $g(x) \leq 0$.

2. On souhaite déterminer la position relative de la fonction $f(x) = \ln(x)$ et de la droite d'équation $y = x - 1$.



Pour déterminer la position relative de la courbe d'une fonction $f(x)$ et de la droite d'équation $y = ax + b$:

- ① On calcule $f(x) - (ax + b)$.
- ② On détermine le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors C (la courbe de f) est au-dessus de D (la droite).
Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors C est au-dessous de D .

$$f(x) - (x - 1) = \ln(x) - x + 1 = g(x).$$

Or, d'après la question précédente, $g(x) \leq 0$.

On en déduit que $C_{\ln}$ est au-dessous de la droite D .

★ Exercice 14.8

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0 ; +\infty[$.
4. T est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

a) Déterminer une équation réduite de T .

b) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2x - 3.$$

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Correction :

1.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x^2}$

- $x^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
- $1+x > 0$ car $x > 0$.
- On en déduit que $f'(x) \leq 0$.

On dresse le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

3.



Pour montrer que l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur un intervalle I :

- ① On précise que f est continue sur I .
- ② On précise que f est strictement monotone sur I .
- ③ On précise que $c \in f(I)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur I .

- ① f est continue sur $]0 ; +\infty[$ car dérivable sur $]0 ; +\infty[$
- ② f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
- ③ $f(]0 ; +\infty[) =]-\infty, +\infty[$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique x_0 sur $]0 ; +\infty[$.



4. a) Pour déterminer une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a , on procède en trois étapes :

① On calcule $f(a)$.

② On calcule $f'(a)$.

③ Une équation de la tangente à la courbe de f en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

① $f(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 = 1.$

② $f'(1) = -\frac{1+1}{1^2} = -2.$

③ Une équation réduite de T est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -2(x-1) + 1 = -2x + 2 + 1 = -2x + 3.$$

b) $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 = \frac{-1-x+2x^2}{x^2} = \frac{2x^2-x-1}{x^2}.$

• $x^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.

• $g'(x)$ est donc du signe de $2x^2 - x - 1$, polynôme du second degré dont le discriminant est égal à $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$ et qui admet donc deux

racines : $\frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ et $\frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

$g'(x)$ est finalement du signe de 2 à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau des variations de g :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

$$g(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - (-2x+3) = \frac{1}{x} - \ln x + 2x - 3 = g(x).$

Or, d'après le tableau des variations de g de la question précédente, $g(x) \geq 0.$

On en déduit que C_f est au-dessus de T .

★ Exercice 14.9

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

1. Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geq 0$.
2. Calculer la limite de f en 0 puis calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.

Correction :

1. $1 - \ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow -\ln x \geq -1$

$\Leftrightarrow \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq e$

Dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geq 0$ a pour solution : $]0 ; e[$.

2. Les limites de cette fonction sont très difficiles à calculer.



Remarque : la forme actuelle de f ne permet pas de calculer les limites. Il faut la *modifier*.

On va factoriser le dénominateur par $\ln x$. Ainsi : $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$.

Dès lors, en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0.$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} - 1 = -1$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ par inverse de limites.

En $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} - 1 = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par inverse de limites.

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (x - \ln x) - (\ln x) \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} \ln x - \ln x + \frac{1}{x} \ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

- $(x - \ln x)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln x$.

Ce signe a été étudié à la question précédente.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

$$f(e) = \frac{\ln e}{e - \ln e} = \frac{1}{e - 1}.$$