

Problème :

1. On tire successivement avec remise 2 boules dans une urne contenant 5 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On tire successivement sans remise 2 boules dans une urne contenant 5 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 5 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

Mêmes questions avec des tirages de 3 boules dans une urne contenant 8 boules puis de 6 boules dans une urne contenant 8 boules.

Programme abordé :

- ★ Factorielle
- ★ Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments
- ★ Coefficients binomiaux - Relation
- ★ Formule du triangle de Pascal
- ★ Application : formule du binôme de Newton

Dénombrements

Dénombrer, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. C'est déterminer (compter) le nombre de cas liés à une situation donnée.

I. Premiers exemples : le principe multiplicatif et tirages successifs avec remise

Exemple 1 :

Au restaurant, on compose un menu par le choix d'une entrée parmi les 5 entrées proposées, puis d'un plat parmi 4 plats proposés, enfin d'un dessert parmi les 6 desserts proposés. Quel est le nombre de menus différents possible ?

On peut ainsi composer $5 \times 4 \times 6 = 120$ menus différents.

On parle de **principe multiplicatif**.

Exemple 2 :

On lance quatre fois successivement un dé à six faces. On note à chaque fois le numéro de la face supérieure. On forme ainsi un nombre à quatre chiffres, la place de chacun étant fixée par son ordre d'apparition. Quel est le nombre total de résultats possible ?

On obtient ainsi $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$ résultats possibles.

La situation qui précède et les situations qui suivent peuvent toutes être assimilées à des tirages de boules dans une urne.

Dans l'exemple précédent, la situation est exactement la même que celle où on aurait 6 boules (indiscernables) numérotées de 1 à 6 dans une urne.

On tire une boule au hasard. On note son numéro. *On la remet dans l'urne.* On tire une deuxième boule au hasard, etc. Et ce, 4 fois, ce qui représente les quatre lancers de dés.

On parle de **tirages successifs avec remise**.

Remarque : dans le cas de tirages successifs avec remise, la puissance d'un nombre est au cœur des calculs.

II. Tirages successifs sans remise

Exemple 3 :

Combien de “mots” peut-on écrire à l’aide de quatre lettres différentes ? (Un “mot” est une succession de lettres qui ne se trouve pas nécessairement dans le dictionnaire)

Il y a : $26 \times 25 \times 24 \times 23$ mots possibles (inutile de calculer).

Dans cet exemple, tout se passe « comme si » nous disposions d’une urne dans laquelle il y aurait 26 boules « numérotées » de A à Z (ou de 1 à 26, comme vous voulez).

On tire une boule au hasard. On note sa lettre / son numéro. *On ne la remet pas dans l’urne* (on la « jette »). On tire une deuxième boule au hasard (il n’y a alors plus que 25 boules dans l’urne), etc. Et ce, 4 fois, ce qui représente les quatre lettres.

Exemple 4 :

Quel est le nombre d’arrivées possibles d’une course à 5 participants ? (On admet qu’il n’y a pas d’ex-æquo)

Il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ arrivées possibles.

Définition : Factorielle d’un entier naturel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre “**factorielle n** ” est le produit de tous les entiers naturels de 1 à n ; on le note $n!$.

Ainsi, on a $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Par convention, on a $0! = 1$ et $1! = 1$.

Remarque : les réponses aux deux exemples précédents s’écrivent aussi $5!$ et $\frac{26!}{22!}$.

III. Tirages simultanés

1. Les nombres “ p parmi n ”

Exemple 5 :

Anaïs (A), Bertrand (B), Camille (C), Dominique (D) et Émilie (E) participent à l’élection du délégué de classe. Combien de combinaison de délégués peut-on avoir à l’issue de l’élection ?

Dans cette question, il s’agit de choisir deux personnes au hasard parmi cinq. *Ces deux personnes jouent le même rôle et sont aussi importantes l’une que l’autre.* Il ne s’agit donc pas de tirages successifs car, par exemple, A puis B donne le même résultat que B puis A. Il y a donc *simultanéité*.

Dans cette situation, le *nom* de la réponse est le nombre **2 parmi 5**. On le note $\binom{5}{2}$.

Ce nombre porte également le nom de coefficient binomial (on verra plus loin pourquoi).

Comment le calculer ? Voici trois méthodes.

Méthode 1 : “à la main”

Quelles sont toutes les combinaisons possibles ?

N’oublions pas que AB et BA représente la même combinaison.

AB ; AC ; AD ; AE ; BC ; BD ; BE ; CD ; CE et DC.

Il y a donc 10 combinaisons possibles. $\binom{5}{2} = 10$.

Cette méthode est évidemment fastidieuse et risquée. Il est nécessaire d’utiliser d’autres méthodes dans le cas général.

Méthode 2 : “le triangle de Pascal”

Cette méthode donne une méthode de construction « magique » des nombres “parmi”.



n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Diagram illustrating the construction of the number 10 (highlighted in orange) in the Pascal's triangle. A red path shows the addition of 5 (from row 5, column 0) and 5 (from row 4, column 1) to get 10 (row 5, column 2). An arrow points from the value 10 in the triangle to the binomial coefficient $\binom{5}{2} = 10$.

Le triangle de Pascal

Règle de « construction » :

Un nombre “parmi” est obtenu en ajoutant celui qui est au-dessus à celui qui est à gauche de celui qui est au-dessus.

Mathématiquement, si p vérifie $0 \leq p \leq n-1$, alors on a $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Autres propriétés :

Soit n un entier naturel non nul :

$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{n} = 1 ; \binom{n}{1} = n ;$$

Par symétrie, si p est un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$, alors on a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Cette méthode est pratique pour les nombres “parmi” qui ne sont pas trop grands.

Mais elle devient vite fastidieuse pour des nombres plus grands. Il y a donc une troisième méthode, plus compliquée, mais qui marche « toujours ».

Méthode 3 : “par utilisation de la formule”

Soit E un ensemble non vide contenant n éléments, et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Les nombres $\binom{n}{p}$

Le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble parmi n éléments est noté $\binom{n}{p}$.

Ce nombre se lit « p parmi n ».

On a : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

$$\text{Dès lors : } \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{\overbrace{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}^{5!}}{\underbrace{2 \times 1}_{2!} \times \underbrace{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}_{3!}} = \frac{20}{2} = 10.$$

À retenir :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

★ Exercice :

Calculer : $\binom{3}{0} ; \binom{3}{1} ; \binom{4}{3} ; \binom{4}{4} ; \binom{5}{2} ; \binom{7}{3}$

Correction :

$$\binom{3}{0} = 1 \text{ (formule } \binom{n}{0} = 1) \quad ; \quad \binom{3}{1} = 3 \text{ (formule } \binom{n}{1} = n) \quad ; \quad \binom{4}{3} = 4 \text{ (formule } \binom{n}{n-1} = n)$$

$$\binom{4}{4} = 1 \text{ (formule } \binom{n}{n} = 1) \quad ; \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ (formule } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2})$$

$$\text{Par calcul : } \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{\overbrace{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}^{7!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} \times \underbrace{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}_{4!}} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 35.$$

Exemple d'application en théorie des jeux :

Les nombres suivants se calculent à l'aide d'une calculatrice

- Le nombre de mains au poker classique est égal à $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.
- Le nombre de tirages possibles du loto de la Française des Jeux est égal à :

$$\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19\,068\,840.$$

numéros numéro chance

Vous avez 1 chance sur 19 068 840 de remporter le gros lot.

- Le nombre de tirages à l'EuroMillions est égal à $\binom{50}{5} \times \binom{12}{2} = 139\,838\,160$.
- numéros étoiles

Vous avez 1 chance sur 139 838 160 de remporter le gros lot.

2. Formule du binôme

Les coefficients binomiaux (les nombres “parmi”, donc) apparaissent dans les développements de $(a+b)^n$ où a et b sont deux réels et n un entier naturel non nul.

La quantité $a+b$, constituée de deux termes, est un *binôme*.

- $(a+b)^1 = a+b = 1 \times a + 1 \times b = \binom{1}{0} \times a + \binom{1}{1} \times b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} \times a^2 + \binom{2}{1} \times a \times b + \binom{2}{2} \times b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0} \times a^3 + \binom{3}{1} \times a^2 \times b + \binom{3}{2} \times a \times b^2 + \binom{3}{3} \times b^3$

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Une vidéo à regarder jusqu'à 6'40'' (les amateurs de curiosité pourront aller jusqu'à 11'30'') :



PLAN DE TRAVAIL

Dénombrements

Partie I : le cours

Je dois :

- savoir dénombrer le nombre de cas possibles dans une situation se rapportant à des tirages successifs avec remise, successifs sans remise, simultanés
- savoir utiliser la notation factorielle et calculer avec des factorielles
- savoir calculer des coefficients binomiaux et connaître en particulier $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$

Partie II : l'entraînement

Mon parcours :

Vous pouvez aussi choisir les exercices comme vous le souhaitez pour ajuster votre parcours...

	Parcours bleu	Parcours vert	Parcours rouge
Tirages successifs et simultanés	15.1 – 15.2 15.3 – 15.4		15.5
Factorielles et nombres parmi	15.6 – 15.7	15.6.3	
Formule du binôme			15.8

Tableau de suivi (à compléter au fur et à mesure pour permettre un réinvestissement ultérieur) :

[illegible]

Dénombrements Exercices
--

<i>Tirages successifs et simultanés</i>

★ Exercice 15.1

1. Quel est le nombre de bulletins simples possibles au loto sportif ?
(principe : cocher 1 ou N ou 2 pour 13 matchs de football)
2. Quel est le nombre de “mots” s’écrivant à l’aide de 4 lettres ?
3. On lance trois dés. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
4. Combien y a-t-il d’entiers de 4 chiffres ?
5. Quel est le nombre de “mots” de 4 lettres commençant par un A ?
6. Combien peut-on former d’entiers de 3 chiffres contenant au moins l’un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?

★ Exercice 15.2

1. Quel est le nombre d’arrivées possibles sur un tiercé de 21 chevaux ?
2. Quel est le nombre de “mots” s’écrivant à l’aide de 4 lettres distinctes ?

★ Exercice 15.3

1. Quel est le nombre de mains possibles au poker ?
(mains de 5 cartes issues d’un jeu de 52 cartes)
2. Quel est le nombre de tirages possibles à l’Euro Millions ?
(5 numéros parmi 50 puis 2 étoiles parmi 12)
3. Quel est le nombre de tirages possibles d’un loto comportant 4 nombres pairs et 2 nombres impairs ? (tirage de 6 numéros parmi 49)

★ Exercice 15.4

1. On tire successivement avec remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On tire successivement sans remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

★ **Exercice 15.5**

On considère une main de 5 cartes issues parmi un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'avoir exactement une dame ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un trèfle ?

Factorielles et nombres parmi

★ **Exercice 15.6**

1. Calculer $4!$, $5!$ et $6!$.
2. Simplifier sans utiliser la calculatrice $\frac{12!}{10!}$; $\frac{12!}{4!8!}$.
3. Exprimer en fonction de n , et sans factorielle, les nombres suivants :
 $\frac{(n+1)!}{n!}$; $\frac{(n-1)!}{n!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

★ **Exercice 15.7**

1. Donner la valeur des expressions suivantes : $\binom{12}{8}$, $\binom{5}{4}$.
2. Exprimer en fonction de n , et sans factorielle, le nombre : $\binom{n}{2}$.
3. Calculer les nombres suivants :
 $A = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1}$; $B = \binom{15}{1} + \binom{4}{3}$; $C = \binom{n}{0}$
 $D = \binom{n}{1}$; $E = \binom{n}{n}$

Formule du binôme

★ **Exercice 15.8**

- a) Rappeler la formule du binôme.
- b) Donner les trois termes de plus bas degré de : $(1+x)^n$.