

Dénombrements Exercices
--

<i>Tirages successifs et simultanés</i>
--

★ Exercice 15.1

1. Quel est le nombre de bulletins simples possibles au loto sportif ?
(principe : cocher 1 ou N ou 2 pour 13 matchs de football)
2. Quel est le nombre de “mots” s’écrivant à l’aide de 4 lettres ?
3. On lance trois dés. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
4. Combien y a-t-il d’entiers de 4 chiffres ?
5. Quel est le nombre de “mots” de 4 lettres commençant par un A ?
6. Combien peut-on former d’entiers de 3 chiffres contenant au moins l’un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?

Correction :

1. Pour le 1^{er} match il y a 3 possibilités, pour le 2^e match il y a trois possibilités, etc. :
$$\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{13 \text{ matches}} = 3^{13} \text{ (ne pas le calculer).}$$
2. Pour la 1^{ère} lettre il y a 26 possibilités, pour la 2^e il y a 26 possibilités, etc. :
$$\underbrace{26 \times 26 \times 26 \times 26}_{4 \text{ lettres}} = 26^4 \text{ (ne pas le calculer).}$$
3. Pour le 1^{er} dé il y a 6 possibilités, pour la 2^e il y a 6 possibilités, etc. : $\underbrace{6 \times 6 \times 6}_{3 \text{ dés}} = 6^3 = 216.$
4. Pour le 1^{er} chiffre, il y a 9 possibilités (de 1 à 9) car il ne peut pas commencer par 0 (le nombre n’aurait alors pas de millier et ne serait pas à 4 chiffres. Il y a 10 possibilités pour chacun des trois autres chiffres (de 0 à 9). Finalement, par principe multiplicatif, il y a :
 $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ entiers à 4 chiffres.
5. Pour la 1^{ère} lettre il y a un seul choix, le A et il y a 26 choix pour chacune des trois autres lettres. Par principe multiplicatif, il y a : $1 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^3$ (ne pas calculer).
6. Cette question (bonus) est la plus difficile.
 - Important : il y a les mots « au moins un » → on pense à regarder la situation contraire qui est *aucun*.
 - Combien y a-t-il d’entiers de 3 chiffres *ne contenant pas* l’un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?
Pour le 1^{er} chiffre, on a 6 choix (au lieu de 10). Même chose pour le 2^e et 3^e chiffre.
Il y a donc $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ entiers qui *ne contiennent pas* l’un des chiffres 0, 3, 6, 9.
 - Combien y a-t-il d’entiers de 3 chiffres ? La question ressemble à la question 3 !
Il y a $9 \times 10 \times 10 = 900$ entiers à 3 chiffres.
 - Finalement, la réponse est : $900 - 216 = 684.$

★ **Exercice 15.2**

1. Quel est le nombre d'arrivées possibles sur un tiercé de 21 chevaux ?
2. Quel est le nombre de "mots" s'écrivant à l'aide de 4 lettres distinctes ?

Correction :

1. Pour le 1^{er} cheval (le gagnant) il y a 21 possibilités, pour le 2^e cheval il n'y a plus que 20 possibilités et il n'y a plus que 19 possibilités pour le 3^e cheval :
 $21 \times 20 \times 19 = 7\,980$ (là, on pose le calcul).
2. Pour la 1^{ère} lettre il y a 26 possibilités, pour la 2^e il n'y a plus que 25 possibilités, etc. :
 $\underbrace{26 \times 25 \times 24 \times 23}_{4 \text{ lettres distinctes}} = 26^4$ (ne pas le calculer).

★ **Exercice 15.3**

1. Quel est le nombre de mains possibles au poker ?
(mains de 5 cartes issues d'un jeu de 52 cartes)
2. Quel est le nombre de tirages possibles à l'Euro Millions ?
(5 numéros parmi 50 puis 2 étoiles parmi 12)
3. Quel est le nombre de tirages possibles d'un loto comportant 4 nombres pairs et 2 nombres impairs ? (tirage de 6 numéros parmi 49)

Correction :

1. Réponse dans le cours : $\binom{52}{5}$ (on ne le calcule pas).
2. Réponse dans le cours : $\binom{50}{5} \times \binom{12}{2}$ (on ne le calcule pas).
3. - Il y a 24 numéros pairs (2, 4, ..., 46 et 48). On en choisit 4 parmi eux : $\binom{24}{4}$.
- Il y a 25 numéros impairs (1, 3, ..., 47 et 49). On en choisit 2 parmi eux : $\binom{25}{2}$.
- Par principe multiplicatif, le résultat est : $\binom{24}{4} \times \binom{25}{2}$.

★ Exercice 15.4

1. On tire successivement avec remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On tire successivement sans remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

Correction :

1. Il s'agit de 3 tirages avec remise dans une urne contenant 8 boules : $\underbrace{8 \times 8 \times 8}_{3 \text{ boules}} = 8^3 = 512$.

2. Il s'agit de 3 tirages sans remise dans une urne contenant 8 boules : $\underbrace{8 \times 7 \times 6}_{3 \text{ boules}} = 336$.

3. Il s'agit d'un tirage simultané : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{\overbrace{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}^{8!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} \times \underbrace{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}_{5!}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{\cancel{5} \times \cancel{4}} = 56$.

★ Exercice 15.5

On considère une main de 5 cartes issues parmi un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'avoir exactement une dame ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un trèfle ?

Correction :

Dans un jeu de 32 cartes, il y a toujours 4 couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle), mais il n'y a plus que 8 valeurs (7, 8, 9, 10, V, D, R, A)

1. - On doit tirer une dame parmi 4 dames : $\binom{4}{1}$
 - Il faut choisir 4 cartes parmi toutes celles qui ne sont pas des dames (il y en a $32 - 4 = 28$) : $\binom{28}{4}$
 - Par principe multiplicatif, le nombre de tirages avec exactement une dame est : $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$.
 - De plus, le nombre de tirages total est : $\binom{32}{5}$ (5 cartes parmi 32)

- Finalement, la probabilité demandée est : $\frac{\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total)

2. Le concept est le même :

- On doit tirer un trèfle parmi 8 trèfles : $\binom{8}{1}$
- Il faut choisir 4 cartes parmi toutes celles qui ne sont pas des trèfles (il y en a $32 - 8 = 24$) : $\binom{24}{4}$
- Par principe multiplicatif, le nombre de tirages avec exactement une dame est : $\binom{8}{1} \times \binom{24}{4}$.
- De plus, le nombre de tirages total est : $\binom{32}{5}$ (5 cartes parmi 32)
- Finalement, la probabilité demandée est : $\frac{\binom{8}{1} \times \binom{24}{4}}{\binom{32}{5}}$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total)

Factorielles et nombres parmi

★ Exercice 15.6

1. Calculer $4!$, $5!$ et $6!$.
2. Simplifier sans utiliser la calculatrice $\frac{12!}{10!}$; $\frac{12!}{4!8!}$.
3. Exprimer en fonction de n , et sans factorielle, les nombres suivants :
 $\frac{(n+1)!}{n!}$; $\frac{(n-1)!}{n!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Correction :

1. $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$$2. \frac{12!}{10!} = \frac{\overbrace{12 \times 11 \times \cancel{10} \times \cancel{9} \times \dots}^{12!}}{\underbrace{\cancel{10} \times \cancel{9} \times \dots}_{10!}} = 12 \times 11 = 132.$$

$$\frac{12!}{4! \times 8!} = \frac{\overbrace{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \dots}^{12!}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!} \times \underbrace{\cancel{8} \times \cancel{7} \times \dots}_{8!}} = \frac{\cancel{12} \times 11 \times 10 \times 9}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 2 \times 1} = \frac{11 \times \cancel{10} \times 9}{\cancel{2}} = 11 \times 5 \times 9 = 495.$$

$$3. \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times \cancel{n} \times (\cancel{n-1}) \times \dots}{\cancel{n} \times (\cancel{n-1}) \times \dots} = n+1.$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(\cancel{n-1}) \times (\cancel{n-2}) \times \dots}{n \times (\cancel{n-1}) \times (\cancel{n-2}) \times \dots} = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n \times (\cancel{n-1}) \times (\cancel{n-2}) \times \dots}{(\cancel{n-1}) \times (\cancel{n-2}) \times \dots} = (n+1) \times n.$$

★ Exercice 15.7

1. Donner la valeur des expressions suivantes : $\binom{12}{8}$, $\binom{5}{4}$.
2. Exprimer en fonction de n , et sans factorielle, le nombre : $\binom{n}{2}$.
3. Calculer les nombres suivants :
 $A = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1}$; $B = \binom{15}{1} + \binom{4}{3}$; $C = \binom{n}{0}$
 $D = \binom{n}{1}$; $E = \binom{n}{n}$

Correction :

1. On calcule $\binom{12}{8}$ par formule. $\binom{12}{8} = \frac{12!}{4! \times 8!}$. On reconnaît le calcul du 2. De l'exercice précédent.

$$\binom{5}{4} = 5 \text{ (formule } \binom{n}{n-1} = n \text{)}$$

$$2. \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \dots}^{n!}}{\underbrace{2 \times 1 \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \dots}_{(n-2)!}} = \frac{n \times (n-1)}{2}.$$

On vient de démontrer le résultat noté dans l'encadré du cours.

3. $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ (formule précédente) et $\binom{4}{1} = 4$ (formule $\binom{n}{1} = n$).

$$\text{Donc } A = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40.$$

$$\binom{15}{1} = 15 \text{ (formule } \binom{n}{1} = n \text{)} \text{ et } \binom{4}{3} = 4 \text{ (formule } \binom{n}{n-1} = n \text{)}.$$

$$\text{Donc } B = \binom{15}{1} + \binom{4}{3} = 15 + 4 = 19.$$

$$C = \binom{n}{0} = 1, D = \binom{n}{1} = n \text{ et } E = \binom{n}{n} = 1 \text{ par cours}$$

Formule du binôme

★ Exercice 15.8

- a) Rappeler la formule du binôme.
b) Donner les trois termes de plus bas degré de : $(1+x)^n$.

Correction :

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

2. On remplace a par 1 et b par x :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \text{ car } 1^{\text{puissance n'importe quoi}} = 1.$$

Pour obtenir le terme de plus bas degré (le terme constant), on remplace k par 0.

On obtient : $\binom{n}{0} x^0 = 1.$

Pour obtenir le terme de degré 1 (le terme en x), on remplace k par 1.

On obtient : $\binom{n}{1} x^1 = n x.$

Pour obtenir le terme de degré 2 (le terme en x^2), on remplace k par 2.

On obtient : $\binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2.$