

Problème :

On considère la fonction inverse définie sur $[1 ; +\infty[$, et plus précisément à l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse, la droite d'équation $x=1$ et la droite d'équation $x=t$ où t est un réel strictement supérieur à 1. Cette aire est notée $A(t)$.

1. Que vaut $A(t)$?
2. Résoudre $A(t)=1$ puis $A(t)=2$.
3. Peut-on résoudre $A(t)=1,5$?

Problème :

Samedi matin un peu avant 10h00, vous vous rendez chez un ami pour réviser avec lui. Vous vous rendez compte que la porte est mal fermée et vous vous décidez à la pousser. C'est là que vous découvrez son corps gisant par terre. Rapidement vous prévenez la police et leurs experts relèvent immédiatement différents indices dont :

- la température du corps à 9h00 est de 26.6 °C ;
- la température du corps à 10h00 est de 25.5 °C ;
- la température - supposée constante - de la pièce est de 21.1 °C.

Vous vous rendez vite compte que pour la police vous êtes le principal suspect, vous avez besoin d'un solide alibi. La veille au soir vous étiez avec des amis jusqu'à 23h00 mais vous ne savez pas si cela va suffire à vous disculper.

Vous devez absolument connaître l'heure du décès.

La variation de la différence entre la température du corps et celle de la pièce est proportionnelle à cette différence.

Votre alibi sera-t-il suffisant ?

Programme abordé :

- ★ Fonction exponentielle
- ★ Dérivée, limites, représentation graphique

Fonction exponentielle

I. Notion de fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ de $\mathbb{R}$. Elle prend, une fois et une seule, toute valeur réelle comprise dans $[f(a) ; f(b)]$.

On dit que f est une bijection de l'intervalle $[a ; b]$ sur l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$. Elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} de l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$ sur l'intervalle $[a ; b]$.

$$\forall x \in I, \forall y \in f(I), y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Par extension, l'intervalle I peut être ouvert ou semi-ouvert.

Si f est continue strictement monotone sur I , f admet une fonction réciproque f^{-1} continue strictement monotone sur $f(I)$ et variant dans le même sens que f .

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.

II. Définition – Relation fonctionnelle

1. Définition

La fonction $\ln$ est strictement croissante de $]0 ; +\infty[$ sur $] -\infty ; +\infty[$.

Alors pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; +\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[: e^x$.

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la fonction réciproque de $\ln$.

$\exp : x \rightarrow e^x$ définie par $x = \ln(e^x)$

$$\mathbb{R} \rightarrow]0 ; +\infty[$$

Conséquences immédiates :

- $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.

- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln x} = x$.
- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on sait, par symétrie, à quoi elle ressemble...)

2. Relation fonctionnelle

La fonction $\ln$ “transforme un produit en somme”. La fonction $\exp$ “transforme une somme en produit”. On admet les théorèmes suivants :

Pour tous nombres réels a et b ,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{an}$$

Remarque :

Les propriétés ci-dessus justifient d’autant mieux la notation e^x .

III. Étude des variations de $\exp$

1. Sens de variation. Signe

Dériver $x = \ln(e^x)$. En déduire $(e^x)'$.

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.

Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

Or $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$...

On en déduit le tableau de variations...

2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

À l’aide de la calculatrice, on constate que lorsque x augmente, e^x augmente très vite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Par ailleurs, lorsque x se rapproche de $-\infty$, e^x se rapproche de 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

La courbe représentative de $\exp$ admet donc $y = 0$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

3. Courbe représentative

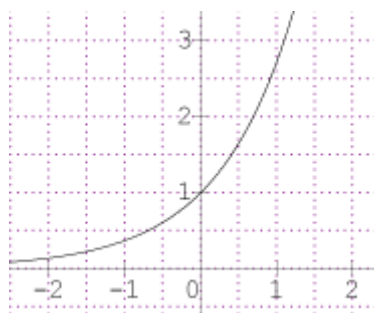
Finalement, le **tableau de variation de exp** est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

Quelques valeurs approchées :

Valeur exacte exp	e^{-2}	e^{-1}	e^0	e^1	e^2
Valeur exacte ou approchée	$\approx 0,1$	$\approx 0,4$	1	$\approx 2,7$	$\approx 7,4$

Le graphique de exp est :



IV. Fonctions de la forme e^u

1. Dérivée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

★ Exercice

Déterminer les dérivées de :

1. $f : x \rightarrow e^{2x}$
2. $f : x \rightarrow e^{4x-3}$
3. $f : x \rightarrow e^{-x}$
4. $f : x \rightarrow e^{x^2}$

2. Primitive

Si sur un intervalle I une fonction g est telle que $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$ alors les primitives G de g sur I sont définies par $G(x) = e^{u(x)} + C$ où C est une constante réelle.

★ Exercice

Déterminer une primitive des fonctions :

1. $f : x \rightarrow e^{2x}$
2. $f : x \rightarrow e^{4x-3}$
3. $f : x \rightarrow e^{-x}$
4. $f : x \rightarrow xe^{x^2}$

PLAN DE TRAVAIL

Fonction exponentielle

Partie I : le cours

Je dois :

- connaître les formules de simplification de exp.
- savoir résoudre des équations ou des inéquations contenant exp.
- savoir étudier des limites de fonctions définies à l'aide de exp.
- savoir dériver et étudier les variations de fonctions définies avec exp.
- connaître le tableau des dérivées COMPLET.

Partie II : l'entraînement

Mon parcours :

Vous pouvez aussi choisir les exercices comme vous le souhaitez pour ajuster votre parcours...

	Parcours bleu	Parcours vert	Parcours rouge
Simplification avec des exp	16.1		
Dérivées et études de variations	16.2 – 16.3 16.5 – 16.9.A	16.2.4 – 16.2.7 16.2.12 – 16.4 16.6	16.2.9 – 16.2.10 16.2.11 – 16.7 16.9.B
Initialisation à la démonstration par récurrence	16.8		

Tableau de suivi (à compléter au fur et à mesure pour permettre un réinvestissement ultérieur) :

[illegible]

Fonction exponentielle
Exercices

★ **Exercice 16.1**

Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

1. $\frac{e^7}{e^2}$ 2. $\frac{(e^{-1})^4}{e}$

★ **Exercice 16.2**

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- préciser l'ensemble de définition,
- calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition,
- calculer la dérivée,
- déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.

1. $f(x) = e^x + 2x$	2. $f(x) = e^x - x$	3. $f(x) = x e^x$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$	5. $f(x) = e^{2x}$	6. $f(x) = e^{-x}$
7. $f(x) = (e^x - 1)^2$	8. $f(x) = (x + 3)e^{-x}$	9. $f(x) = x + 4e^{-x}$
10. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$	11. $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$	12. $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

★ **Exercice 16.3**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

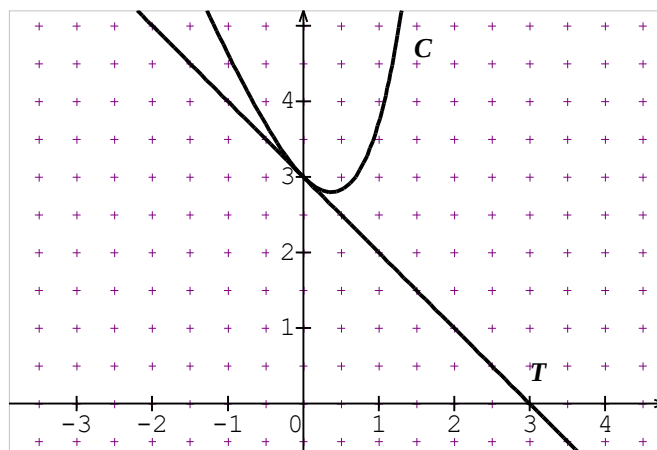
★ Exercice 16.4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + xe^x,$$

où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous, on donne sa courbe représentative C et la tangente T à C au point d'abscisse 0.



1. Indiquer, à l'aide du graphique, $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de chacune des constantes a et b .

★ Exercice 16.5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe de f admet une asymptote oblique que l'on précisera.
3. a) Calculer $f'(x)$.
 b) Déterminer le tableau complet des variations de f .
 c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la position relative de la courbe de la fonction exponentielle et de la droite d'équation $y = x + 1$.
5. Donner l'allure de la courbe de f .

★ **Exercice 16.6**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{2 + e^x}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{2e^{-x} + 1}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de la fonction f .

★ **Exercice 16.7**

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Quel est le signe de la fonction $f(x)$?
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = f(2x)$.

★ **Exercice 16.8**

Initiation à la démonstration par récurrence.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. D'après vous, sans la calculer, quelle serait l'expression de la dérivée 5^e de f , $f^{(5)}(x)$?
Conjecturer pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)$.

★ Exercice 16.9

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathbb{R}$.

Justifier que $\alpha \in [-2; -1]$. (On donne $e^{-1} \approx 0,4$ et $e^{-1} \approx 0,1$).

- b) Que permet d'obtenir le programme Python suivant ?

```
import numpy as np
alpha=-2
while np.exp(alpha)+alpha+1<0:
    alpha=alpha+0.01
print(alpha-0.01,alpha)
```

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. Le programme Python précédent affiche :

-1.2799999999999994 -1.2699999999999994

Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en donner une valeur approchée à 0,1 près.

2. a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat en $-\infty$ et montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

- b) Montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

- c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.