

DM 1

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Quel est le plus petit des nombres constituant cette somme ? Quel est le plus grand ?
Quel est le nombre de termes de cette somme ?
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$.
4. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

1. $u_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$u_2 = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}.$$

2. $u_n = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n}$.

Le plus petit des nombres constituant cette somme est $\frac{1}{2n}$. Le plus grand est $\frac{1}{n}$.

si deux fractions ont même numérateur, elles sont rangées dans l'ordre inverse de leur dénominateur

Cette somme comprend $n+1$ termes. # autant qu'il y a de termes de n à $2n$

3. # u_n qui possède $n+1$ termes, est plus grand que $n+1$ fois son terme le plus petit
de même, u_n est plus petit que $n+1$ fois son terme le plus grand

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1) \times \frac{1}{2n} \leq u_n \leq (n+1) \times \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}.$$

4. D'après ce qui précède, en divisant par n (non nul), on obtient : $\frac{n+1}{2n^2} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n^2}$.

connaître les limites à l'infini des fonctions rationnelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

On en déduit, par théorème d'encadrement (ou : d'après le théorème des gendarmes),

$$\left(\frac{u_n}{n}\right) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$.

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$.

★ $2 \times 3^{1-1} - 1 = 2 \times 3^0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 = u_1$. La proposition est vraie au rang 1.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(2 \times 3^{n-1} - 1) + 2 = 2 \times 3^n - 3 + 2 = 2 \times 3^n - 1 = 2 \times 3^{(n+1)-1} - 1.$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

★ D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.