

DM 1

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Quel est le plus petit des nombres constituant cette somme ? Quel est le plus grand ?
Quel est le nombre de termes de cette somme ?
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$.
4. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$.