

DM 2

EXERCICE

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{2x+1}{x+1} = x$.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; 2]$. En déduire $f([0 ; 2])$.

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$;
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Montrer que (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?