

Problème :

Un site internet propose des jeux en ligne. Dans un jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à 0,25. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur. Quelle est la probabilité que le joueur gagne 5 parties ?

Programme abordé :

- ★ Loi certaine
- ★ Loi uniforme sur $[[1; n]]$
- ★ Loi de Bernoulli
- ★ Loi binomiale

Lois de probabilité usuelles

On considère une expérience aléatoire d'univers associé Ω .

I. Loi certaine

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi certaine s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'événement $[X = a]$ est certain c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad P[X = a] = 1$$

On dit aussi que X est une variable aléatoire certaine.

Exemple :

Une urne contient n boules de couleurs différentes qui portent toutes le numéro 7. On tire une boule et on note X le numéro tiré. Alors X est une variable aléatoire certaine et $[X = 7]$ est un événement certain.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a . Alors,

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0$$

II. Loi uniforme sur $1, n$

Exercices 1, 2 & 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $1, n$ si :

$$X(\Omega) = 1, n \quad \text{et} \quad \forall k \in 1, n, P[X = k] = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, n)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

III. Loi de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues possibles.

Exemple : lancer d'une pièce de monnaie.

On considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue de l'épreuve et 0 sinon.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p .

x_i	0	1
p_i	$1 - p$	p

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors,

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

★ Exercice : schéma de Bernoulli :

On considère trois lancers successifs d'un dé non truqué avec le succès « obtenir 6 ».

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès. Calculer $p[X = 2]$.

IV. Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes.

Exemple : 10 lancers d'une pièce de monnaie.

On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès.

Soit un entier k tel que $0 \leq k \leq n$. La probabilité d'obtenir k succès lors de la répétition de n

épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p est : $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi binomiale de paramètres n et p . Alors,

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$

PLAN DE TRAVAIL

Lois usuelles

Partie I : le cours

Je dois :

- reconnaître $\mathcal{U}_{1,n}$ et connaître $X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{1,n}$
- reconnaître $\mathcal{B}(p)$ et connaître $X(\Omega)$, $E(X)$ et $V(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
- reconnaître et justifier $\mathcal{B}(n, p)$ et connaître $X(\Omega)$, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$, $E(X)$ et $V(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Partie II : l'entraînement

Mon parcours :

Vous pouvez aussi choisir les exercices comme vous le souhaitez pour ajuster votre parcours...

	Parcours bleu	Parcours vert	Parcours rouge
Loi uniforme	21.1 21.2	21.4	21.3
Loi binomiale	21.5 – 21.6 21.7	21.6.2 21.8	

Tableau de suivi (à compléter au fur et à mesure pour permettre un réinvestissement ultérieur) :

[illegible]

Lois usuelles Exercices
--

Loi uniforme

★ Exercice 19.1

On lance une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le nombre 1 si on obtient pile et le nombre 2 si on obtient face.

Déterminer la loi de probabilité de X , $E(X)$ et $V(X)$.

★ Exercice 19.2

On lance un dé à six faces bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer effectué associe le numéro de la face supérieure.

Déterminer la loi de probabilité de X , $E(X)$ et $V(X)$.

★ Exercice 19.3 (*bonus : démonstrations de cours*)

Dans cet exercice, on n'utilise pas les formules, on les démontre.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue un tirage. Soit X la variable aléatoire qui associe le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X , puis $E(X)$.

2. On admet que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $V(X)$.

★ Exercice 19.4

Une urne contient 1 boule rouge et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On pioche successivement et sans remise les trois boules. On note X le numéro du tirage auquel est apparue la boule rouge.

1. Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

2. Donner les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Loi binomiale

★ Exercice 19.5

On jette 180 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Donner $X(\Omega)$ puis, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
3. Quelles sont les valeurs de l'espérance mathématique et de l'écart-type du "chiffre 6" ?

★ Exercice 19.6

On jette 6 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X le nombre de face obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Donner $X(\Omega)$ puis, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$. Donner enfin $E(X)$ et $V(X)$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a) exactement 2 fois "face" ? exactement 3 fois "face" ?
 - b) au moins 5 fois "face" ?

★ Exercice 19.7

Un site internet propose des jeux en ligne. Dans un jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à 0,25. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Calculer $p(X = 0)$ puis calculer $p(X = 2)$.
3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ?
4. Déterminer l'espérance de X et la variance de X .
5. Le joueur doit payer 20 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? Justifier.

★ Exercice 19.8

Un serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1.
 - a) Donner la loi de X . On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
 - b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels. Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de Y .