

Question :

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 4]$ par : $g(x) = 2x$. Pour $t \in [0 ; 4]$, on appelle $f(t)$ l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de g , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$. Calculer numériquement $f(t)$.

Problème :

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique ci-dessous.

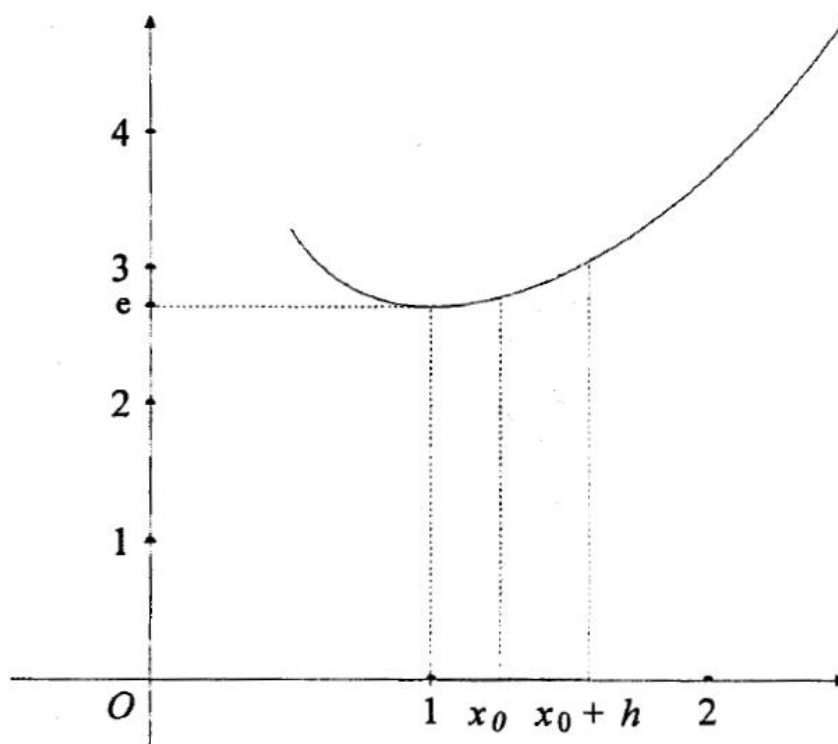
On considère la fonction f dont on donne ci-dessous la représentation graphique dans un repère orthogonal, qui est continue sur $[1 ; +\infty[$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Pour tout réel x_0 de $[1 ; +\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

1. Que vaut $A(1)$?
2. Soit h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

3. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?
4. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A . Pour $x \in [1 ; +\infty[$, que vaut $A'(x)$?



Programme abordé :

- ★ Primitive d'une fonction continue sur un intervalle
- ★ Toute fonction f continue sur un intervalle y admet au moins une primitive F
- ★ Relation de Chasles
- ★ Linéarité de l'intégrale
- ★ Positivité de l'intégrale. Comparaison d'intégrales

Primitives d'une fonction continue et Intégration

I. Primitives d'une fonction continue

1. Primitive de f sur I

Définition :

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I qui vérifient :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

On dit aussi bien :

- f est la dérivée de F
- F est une primitive de f

Propriété :

Une fonction possède une infinité de primitives, toutes égales à une constante près.

Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 5$, $F_3(x) = x^2 - 51$ ou $F_4(x) = x^2 + \frac{3157}{17}$

sont quatre primitives de la fonction $f(x) = 2x$.

★ Exercice 1 (premier type de tâche) :

Démontrer que F définie sur $]3; +\infty[$ par $F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est une primitive de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ sur $]3; +\infty[$.

★ Exercice 2 (deuxième type de tâche) :

1. Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive de $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des primitives (à une constante près) :

$f(x)$	$\int f$	Forme de la fonction	Primitive
k constante	$k x$	$u'u$	$\frac{u^2}{2}$
$mx + p$	$m \frac{x^2}{2} + p x$	$u'u^2$	$\frac{u^3}{3}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2u^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{u'}{u^4}$	$-\frac{1}{3u^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$u'e^u$	e^u
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$	$u'v$ (IPP)	$uv - \int uv'$
e^x	e^x	$u \times v$	NON
e^{-x}	$-e^{-x}$	$\frac{u}{v}$	NON
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$		
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$		

2. Existence de primitives

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur l'intervalle I .

Remarque :

Ce théorème donne une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction, mais cette condition n'est pas nécessaire : certaines fonctions discontinues peuvent aussi admettre des primitives.

3. Primitives d'une même fonction

Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I , alors :

- les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \rightarrow F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$;
- pour tout couple $(x_0 ; y_0)$, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Autrement dit, trois types de questions peuvent être – en théorie – posées :

- « Déterminer **une** primitive » (sous-entendu, *n'importe laquelle*)
- « Déterminer **les** primitives » (sous-entendu, *toutes*)
- « Déterminer **la** primitive **qui vérifie une condition** »

★ Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

1. Déterminer une primitive de f .
2. Déterminer les primitives de f .
3. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1.

⇒ **Beaucoup s'entraîner sur Wims**

II. Intégration

1. Intégrale et primitive

Si f est continue, positive et croissante sur un intervalle $[a ; b]$, alors la fonction $x \rightarrow A(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a .

On admet que ce résultat se généralise.

a) Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I . La fonction Φ définie sur I par $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarques :

- On ne peut pas employer la même lettre pour une borne de l'intégrale (ici x) et la variable "muette" d'intégration, notée ici t .
- La fonction Φ définie dans le théorème est donc dérivable sur I de dérivée f .

Exemple :

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$; son unique primitive qui s'annule en 1 étant la fonction logarithme népérien, on a, pour tout t de $]0 ; +\infty[$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

b) Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a et b de I , on a : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I .

On a ainsi un procédé de calcul d'une intégrale pour une fonction continue dont on connaît une primitive. L'expression a un sens quels que soient le signe de la fonction f et l'ordre des bornes a et b .

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$.

2. Propriétés de l'intégrale

Les démonstrations reposent en général sur le calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, mais l'interprétation en termes d'aire permet de visualiser ces propriétés dans certains cas.

a) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a , b et c de I , on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

b) Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et k un réel.

Pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad ; \quad \int_a^b (k f)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

c) Positivité

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Cette propriété est liée à la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire située sous la courbe représentative de la fonction sur $[a ; b]$.

d) Signe d'une intégrale

Si $f \geq 0$ sur I	avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$	avec $a \geq b$, $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
Si $f \leq 0$ sur I	avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x) dx \leq 0$	avec $a \geq b$, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

e) Conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur I , et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

PLAN DE TRAVAIL

Intégration

Partie I : le cours

Je dois :

- connaître parfaitement le tableau des primitives COMPLET
- calculer $\int_a^b f(x)dx$ par calcul d'une primitive de f
- connaître les propriétés de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, ...)

Partie II : l'entraînement

Mon parcours :

Vous pouvez aussi choisir les exercices comme vous le souhaitez pour ajuster votre parcours...

	Parcours bleu	Parcours vert	Parcours rouge
Calculs d'intégrales	20.1 – 20.4	20.1.8	20.1.9 – 20.5
Relation de Chasles	20.2	20.2.4	
Signe d'une intégrale	20.3		

Tableau de suivi (à compléter au fur et à mesure pour permettre un réinvestissement ultérieur) :

Ex.	J'ai consulté la correction	J'ai réussi	Je n'ai pas réussi...		Mon petit mémo... <i>Pour faciliter les révisions, préciser difficultés, exercices à refaire, points à consolider, conseils donnés, etc.</i>
			...mais j'ai compris avec la correction	...et j'ai encore des difficultés	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐	

Intégration Exercices

Calcul d'intégrales

★ Exercice 20.1

Calculer :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^3 x \, dx, & I_2 &= \int_1^2 (x^2 - 2x) \, dx, & I_3 &= \int_1^e \frac{1}{x} \, dx, & I_4 &= \int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x} \, dx, \\
 I_5 &= \int_0^2 \frac{1}{x+2} \, dx, & I_6 &= \int_0^1 (x^3 + x^2 + x - 1) \, dx, & I_7 &= \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx, & I_8 &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \, dx, \\
 I_9 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx
 \end{aligned}$$

Relation de Chasles

★ Exercice 20.2

1. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_0^5 f(x) \, dx$.

- Sur combien d'intervalles est définie la fonction f ?
- Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?
- Calculer $\int_0^5 f(x) \, dx$

2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_{-2}^3 g(x) \, dx$.

- Sur combien d'intervalles est définie la fonction g ?
- Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?
- Calculer $\int_{-2}^3 g(x) \, dx$

3. Soit h la fonction définie sur $] -\infty, +\infty[$ par : $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 h(x) dx$.

4. Soit j la fonction définie sur $] -\infty, +\infty[$ par : $j(x) = \begin{cases} a x(2-x) & \text{pour } x \in [0 ; 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

où a est un réel. Calculer $\int_{-4}^3 j(x) dx$.

Signe d'une intégrale

★ Exercice 20.3

Sans les calculer, déterminer le signe de $\int_2^1 \sqrt{x} dx$ et de $\int_{0,5}^{0,8} \ln x dx$.

Calcul d'intégrales quand une primitive est donnée/suggérée

★ Exercice 20.4

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(2x) - x$, est une primitive de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x)$.
2. En déduire la valeur de $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x) dx$.

★ Exercice 20.5

On appelle f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2$.

1. Dériver la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x(\ln x)^2$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = \int_e^{e^2} f(x) dx$.

$f(x)$	Une primitive de f	Forme de la fonction	Forme d'une primitive
k constante	kx	$k \times u'$	$k \times u$
$mx + p$	$m \frac{x^2}{2} + px$	$u' + v'$	$u + v$
x	$\frac{x^2}{2}$ ou $\frac{1}{2}x^2$	$u'u$	$\frac{u^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$u'u^2$	$\frac{u^3}{3}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2u^2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{u^4}$	$-\frac{1}{3u^3}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
e^x	e^x	$u'e^u$	e^u
e^{-x}	$-e^{-x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$u \times v$	NON
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\frac{u}{v}$	NON