

Primitives d'une fonction continue

I. Primitive de f sur I

★ Exercice 1 (premier type de tâche) :

Démontrer que F définie sur $]3; +\infty[$ par $F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est une primitive de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ sur $]3; +\infty[$.

Correction :

“Démontrer que F est une primitive de f ” est un « faux » exercice de primitive. En effet, la réponse étant donnée, il suffit de dériver pour vérifier que la relation « primitive / dérivée » est bien vérifiée.

Dérivons $F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$:

Formule : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Donc $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ (simplification par 2).

On a donc bien : $F'(x) = f(x)$. F est bien une primitive de f .

★ Exercice 2 (deuxième type de tâche) :

1. Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive de $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

“Déterminer une primitive de f ” est un exercice délicat. Il faut, a minima, connaître parfaitement le tableau des dérivées comme pour le 1. :

1. D'après le tableau des dérivées, une primitive de f est $F(x) = x^3 + x^2 + x$.
2. D'après le tableau des primitives, une primitive de g est $G(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$.

II. Existence de primitives

III. Primitives d'une même fonction

★ Exercice corrigé 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

1. Déterminer une primitive de f .
2. Déterminer les primitives de f .
3. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1.

Correction :

1. D'après le tableau des primitives, une primitive de f est :

$$F(x) = 2 \times \frac{1}{4} x^4 - 4 \times \frac{1}{3} x^3 + 5 \times x = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x.$$

2. Les primitives de f sont obtenues en ajoutant à une primitive quelconque n'importe quelle constante. Les primitives de f sont donc : $F(x) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
3. On cherche la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1, c'est-à-dire la primitive de f telle que $F(1) = 0$.

D'après la question précédente, la primitive de f est de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x + k$$

L'idée consiste à trouver le k en se servant de l'information $F(1) = 0$.

$$F(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1^4 - \frac{4}{3} \times 1^3 + 5 \times 1 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1^4 - \frac{4}{3} \times 1^3 + 5 \times 1 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 5 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-8+30}{6} + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{6} + k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{25}{6}$$

Finalement, la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1 est : $F(x) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x - \frac{25}{6}$