

Chapitre 1

Éléments de logique

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions de logique afin de mieux appréhender le cours de mathématiques approfondies. Il ne s'agit pas d'un cours de logique au sens propre du terme.

Avant cela, nous commençons par définir ce qu'est une assertion.

Définition 1. Une **assertion** est un énoncé, une phrase contenant des objets mathématiques.

Exemple

- « $3 + 0 = 3$ » est une assertion,
- « $2 + 3 = 7$ » est une assertion,
- « Toutes les marguerites ont quatorze pétales » est une assertion.

À chaque assertion, nous allons associer une valeur de vérité : **vraie** ou **fausse**. Il n'y a, *a priori*, aucune préférence sur la valeur de vérité pour des assertions données¹. Dans ce cours, on partira du principe que sont connues les règles de calcul standard, de telle sorte que l'on sait que « $3 + 0 = 3$ » est une assertion vraie et que « $2 + 3 = 7$ » est une assertion fausse.

Définition 2. Démontrer une assertion, c'est partir d'assertions que l'on sait vraies et en déduire l'assertion voulue. **Faire des mathématiques**, c'est énoncer des assertions vraies et les démontrer.



—**Attention**—

Faire des mathématiques n'est pas *seulement* aligner des calculs.

Au-delà de la capacité à faire des calculs, ce qui est apprécié chez un mathématicien est sa rigueur et sa capacité à n'énoncer que des choses vraies.

1.1 Connecteurs logiques

Commençons par définir ce qu'est un connecteur logique :

Définition 3. Un **connecteur logique** est une opération qui combine une ou plusieurs assertions pour en construire une nouvelle.

1. Autrement dit, on pourrait « décider » que « $3 + 0 = 3$ » est fausse.

Nous commençons avec notre premier connecteur logique :

Définition 4. Le connecteur de **négarion** noté **non** ou avec une barre est défini de la manière suivante. Si A est une assertion alors **non** $A = \overline{A}$ est fausse si A est vraie et est vraie si A est fausse.

Exemple

- La négation de « $\pi < 4$ » est « $\pi \geq 4$ ».
- La négation de « Pythagore était un mathématicien » est « Pythagore n'était pas un mathématicien ».

Définition 5. Le connecteur de **conjonction** noté **et** est défini de la manière suivante. Si A et B sont deux assertions, alors A **et** B est vraie si et seulement si A et B sont toutes les deux vraies.

L'opérateur de disjonction est aussi noté $\wedge$.

Exemple

- « $3 - 2 = 1$ **et** $\pi < 4$ » est vraie.
- « $3 - 2 = 1$ **et** $\pi \geq 4$ » est fausse.

Définition 6. Le connecteur de **disjonction** noté **ou** est défini de la manière suivante. Si A et B sont deux assertions, alors A **ou** B est vraie si et seulement si au moins l'une des deux assertions est vraie.

L'opérateur de disjonction est aussi noté $\vee$.

Exemple

« $3 - 2 = 1$ **ou** $\pi > 4$ » est vraie.

Le connecteur logique qui suit est très important, il est implicite dans beaucoup de raisonnements mathématiques.

Définition 7. Le connecteur d'**implication** ou d'**inférence** noté $\Rightarrow$ est défini de la manière suivante. Si A et B sont deux assertions, alors $A \Rightarrow B$ est vraie si A et B sont vraies **ou** A est fausse.

La proposition A est appelée **prémisse** ou **hypothèse** de l'implication et la proposition B est appelée **conclusion**. La **réciroque** de $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$.

Avec des mots $A \Rightarrow B$ est vraie signifie que « si A est vraie alors B doit être vraie également ». C'est couramment utilisé en mathématiques car si l'on veut démontrer B , il suffit de démontrer $A \Rightarrow B$ et A .

Exemple

Nous donnons deux exemples d'implications :

- « $2x + 5 = 7 \Rightarrow x = 1$ »
- « $3 = 2 \Rightarrow \pi/77 = 35$ »

En particulier, on remarquera que si $A \Rightarrow B$ alors B n'est pas forcément vraie : A pourrait être faux. En fait si A est faux alors peu importe la valeur de vérité de B , on aura toujours $A \Rightarrow B$. On dit parfois que « le faux implique n'importe quoi ». C'est ce que l'on a vu au-dessus.

Exemple

Supposons que Alice demande à Bob de faire le ménage mais que Bob n'a pas envie de le faire. Il pourrait lui répondre « je ferai le ménage quand les poules auront des dents ».

En logique sa phrase s'interprète comme « Les poules ont des dents $\Rightarrow$ « Je fais le ménage ». En soi-même l'implication n'est pas fausse mais Bob ne risque pas de faire le ménage puisque les poules n'ont pas de dents.

En mathématiques, la plupart des propositions sont sous la forme d'une implication $A \Rightarrow B$.

**–Attention–**

Il vaut mieux éviter d'utiliser le symbole $\Rightarrow$ dans une démonstration (ou dans une résolution d'exercice). En effet, il est souvent utilisé, à tort, comme un raccourci de « donc » (le problème étant que quand l'on écrit « $A \Rightarrow B$ », on ne dit rien sur la valeur de vérité de A alors que quand l'on écrit « A donc B » cela sous-entend que l'on a obtenu A et que l'on en déduit B).

Definition 8. Le connecteur d'**équivalence** noté $\Leftrightarrow$ est défini de la manière suivante. Si A et B sont deux assertions, alors $A \Leftrightarrow B$ est vraie si A et B sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Avec des mots $A \Leftrightarrow B$ est vraie signifie que « A est vraie si et seulement si B est vraie ».

Exemple

On a $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

**–Attention–**

Comme pour l'implication, il vaut mieux éviter d'utiliser le symbole $\Leftrightarrow$ dans une démonstration (ou dans une résolution d'exercice). On utilisera de préférence « si et seulement si ».

Nous énonçons maintenant quelques tautologies évidentes avec les définitions données :

Proposition 1 (Modus Ponens). Soit A et B deux assertions, alors

$$(A \text{ et } A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Le modus ponens est l'assertion la plus importante en mathématique car elle est à la base du raisonnement hypothético-déductif.

Exemple

Soit x tel que $2x + 5 = 7$. On sait que $2x + 5 = 7 \Rightarrow 2x = 2$. Ainsi puisque $2x + 5 = 7$ et $2x + 5 = 7 \Rightarrow 2x = 2$, le modus ponens nous dit que $2x = 2$.

D'autre part, on sait que $2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Puisque l'on vient de voir que $2x = 2$ on en déduit (à nouveau via le modus ponens) que $x = 1$.

Proposition 2 (Double négation). Soit A une assertion, alors

$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A.$$

Exemple

S'il est faux de dire que « Michel est grand » alors c'est que Michel est petit.

Proposition 3 (Tiers exclu). *Soit A une assertion, alors*

$$\frac{A \text{ ou } \overline{A}}{\overline{A \text{ et } \overline{A}}}.$$

Exemple

Soit Jean est à la maison, soit Jean n'est pas à la maison.

Proposition 4 (Lois de Morgan). *Soit A et B deux assertions, alors*

$$\begin{aligned}\overline{A \text{ ou } B} &= \overline{A} \text{ et } \overline{B} \\ \overline{A \text{ et } B} &= \overline{A} \text{ ou } \overline{B}\end{aligned}$$

Exemple

S'il est faux de dire que « Jacques aime le roquefort **et** Jacques aime le gruyère » alors Jacques n'aime pas le roquefort **ou** Jacques n'aime pas le gruyère.

Proposition 5 (Commutativité). *Soit A et B deux assertions, alors*

$$\begin{aligned}(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A) \\ (A \text{ et } B) &\Leftrightarrow (B \text{ et } A) \\ (A \text{ ou } B) &\Leftrightarrow (B \text{ ou } A).\end{aligned}$$

Exemple

Dire que « Stéphane est un homme **et** Stéphane a 40 ans » est équivalent à dire que « Stéphane a 40 ans **et** Stéphane est un homme ».

Proposition 6 (Associativité). *Soit A , B et C trois assertions, alors*

$$\begin{aligned}((A \text{ et } B) \text{ et } C) &\Leftrightarrow (A \text{ et } (B \text{ et } C)) \\ ((A \text{ ou } B) \text{ ou } C) &\Leftrightarrow (A \text{ ou } (B \text{ ou } C)) \\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))\end{aligned}$$

Exemple

Dire que Patrick a eu « (17 en SVT et 15 en physique) et 20 en math » c'est la même chose que dire que Patrick a eu « 17 en SVT et (15 en physique et 20 en math) ». C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on dit plutôt que Patrick a eu 17 en SVT et 15 en physique et 20 en math.

Proposition 7 (Distributivité). *Soit A , B et C trois assertions, alors*

$$\begin{aligned}(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) &\Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)) \\ (A \text{ ou } (B \text{ et } C)) &\Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C))\end{aligned}$$

Exemple

Dire que j'aime Alice et (Belle ou Christelle) c'est dire que j'aime (Alice et Belle) ou (Alice et Christelle).

Proposition 8 (Reformulation de l'implication). Soit A et B deux assertions, alors

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ ou } B).$$

Exemple

Plutôt que de dire « si tu fais une bêtise alors je te punis » je peux dire « tu reste tranquille **ou** je te punis ».

Proposition 9 (Double implication). Soit A et B deux assertions, alors

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$$

Exemple

Dire qu'« une fraise est mûre si et seulement si elle est rouge » c'est dire que « si une fraise est mûre alors elle est rouge **et** si une fraise est rouge alors est mûre »

Proposition 10 (Contraposée). Soit A et B deux assertions :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Exemple

Dire que « si un homme est méchant alors il est laid » c'est équivalent à dire que « si un homme est beau alors il est gentil ».

Proposition 11 (Substitution par équivalence). Soit A, B, C, D quatre assertions :

$$(A \Leftrightarrow C \text{ et } B \Leftrightarrow D) \Rightarrow A \text{ et } B \Leftrightarrow C \text{ et } D.$$

$$(A \Leftrightarrow C \text{ et } B \Leftrightarrow D) \Rightarrow A \text{ ou } B \Leftrightarrow C \text{ ou } D.$$

Exemple

Supposons qu'un homme aime les pommes si et seulement s'il aime les poires. Alors un homme aime les bananes ou les pommes si et seulement s'il aime les bananes ou les poires.

Proposition 12 (Transitivité de l'équivalence). Soit A, B, C trois assertions :

$$A \Leftrightarrow B \text{ et } B \Leftrightarrow C \Rightarrow A \Leftrightarrow C.$$

Exemple

Si Bob dit « je rangerai ma chambre si et seulement si mon papa m'offre une crème glacée » et le papa de Bob lui répond « je t'offrirai une crème glacée si et seulement si tu tonds la pelouse » alors « Bob rangera sa chambre si et seulement si Bob tond la pelouse ».



—Attention—

Il est hors de question dans les vrais cours de mathématiques de revenir aux tables de vérité ou d'invoquer explicitement, dans une démonstration, le modus ponens ou toute autre proposition ci-dessus.

Les éléments de logique doivent être utilisés dans la tête pour décomposer un problème, établir un plan pour répondre à une question. C'est ce que l'on fera ensuite.

1.2 Appartenance à un ensemble et quantificateurs

La notion d'ensemble sera considérée comme intuitive ainsi que la notion d'appartenance à un ensemble.

Définition 9. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments** de E . Si un objet x est un élément de l'ensemble E , on dit que x **appartient à** E et on note $x \in E$. Si x n'appartient pas à E , on écrit $x \notin E$.

Exemple

- $\emptyset$ est l'**ensemble vide**. C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.
- $\{1, 2, 3\}$ est l'ensemble contenant les éléments 1, 2 et 3.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont respectivement l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels et des nombres réels.

Les quantificateurs sont très importants en mathématiques. Ils permettent d'énoncer des définitions et assertions mathématiques précises.

Définition 10.

- $\forall$ est le **quantificateur universel**,
- $\exists$ est le **quantificateur existentiel** et
- $\exists!$ est le **quantificateur d'unicité**.

Ces symboles ont une signification précise en mathématiques. Supposons donc que l'on ait un ensemble E et une assertion $P(x)$ dépendant de $x \in E$. Alors

- l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ » signifie que « pour tout x élément de E , $P(x)$ est vraie » ou encore, « tous les éléments de E vérifient P » ;
- l'assertion « $\exists x \in E, P(x)$ » signifie qu'« il existe un élément de E vérifiant P » et
- l'assertion « $\exists! x \in E, P(x)$ » signifie qu'« il existe un unique élément de E vérifiant P ».

Nous allons maintenant énoncer quelques exemples d'assertions mathématiques vues dans le secondaire et « traduites » avec ces quantificateurs.

Exemple

- « Le carré d'un nombre réel est positif ou nul » devient

$$\text{« } \forall x \text{ réel, } x^2 \geq 0 \text{ ».}$$

- « Si le produit de deux nombres réels est nul alors l'un des deux est nul » devient

$$\text{« } \forall a \text{ réel, } \forall b \in \mathbb{R}, ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0) \text{ »}$$

- Le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $a < b$ alors « toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un réel compris entre a et b par f » devient :

$$\text{« } \forall y \text{ dans } [f(a), f(b)], \exists x \in [a, b], f(x) = y \text{ »}$$

— « L'addition de nombre réels est associative » devient

$$\ll \forall a \text{ réel}, \forall b \text{ réel}, \forall c \in \text{réel}, (a + b) + c = a + (b + c) \gg$$



–Attention–

Il faut réserver l'utilisation des quantificateurs et des symboles logiques aux définitions et énoncés de proposition. Quand l'on argumente (dans une démonstration ou dans un devoir), il vaut mieux écrire en toute lettre son argumentation.

Que ce soit en analyse ou en algèbre, il est capital de s'exercer à exprimer des phrases mathématiques en utilisant des quantificateurs et également à les lire.

La plupart des assertions mathématiques sont formées de plusieurs quantificateurs les uns à la suite des autres. On peut se demander à quelle condition l'on peut échanger ces quantificateurs sans changer la valeur de vérité de l'assertion. Il devrait être intuitivement clair que si P est une assertion dépendant de deux objets x, y alors

$$\forall x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y)$$

$$\exists x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y).$$

Exemple

- Prenons pour x, y entiers naturels et $P(x, y)$ l'assertion $xy = yx$ (commutativité de la multiplication). Alors dire que pour tout x dans $\mathbb{N}$, pour tout y dans $\mathbb{N}$ on a $xy = yx$, c'est la même chose que de dire que pour tout y dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $\mathbb{N}$ on a $xy = yx$.
- De la même façon, si l'on prend x, y dans $\mathbb{N}$ et $P(x, y)$ l'assertion $x^2 + y^2 = 5$ alors dire qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $x^2 + y^2 = 5$, c'est la même chose que de dire qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $x^2 + y^2 = 5$.



–Attention–

On ne peut par contre pas échanger un quantificateur $\forall$ avec un quantificateur de type différent. En effet quand l'on écrit $\forall x, \exists y, P(x, y)$, le « y qui existe » dépend de x a priori, alors que quand l'on écrit $\exists y, \forall x, P(x, y)$, le « y qui existe » est le même pour tous les x .

Contre-exemple

Pour x, y dans $\mathbb{N}$, notons $P(x, y)$ l'assertion « $x < y$ ».

D'une part, il est vrai que $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, P(x, y)$. Avec des mots, on est en train de dire que pour tout entier naturel (x) on peut trouver un entier naturel (y) tel que y soit strictement plus grand que x ($P(x, y)$).

D'autre part, $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, P(x, y)$ est fausse. En effet, si elle était vraie cela reviendrait à dire qu'il existe un entier naturel (y) qui soit plus grand ($P(x, y)$) que tout autre entier naturel (x).

Finalement, on termine avec la négation des quantificateurs :

$$\overline{\forall x, P(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x, P(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$$

**–Attention–**

Il ne faut pas oublier de changer le quantificateur ou de nier la proposition.

Exemple

- La négation de « toutes les voitures rapides sont rouges » est « il existe une voiture rapide qui n'est pas rouge ».
- La négation de « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 0$ » c'est « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 0$ ».
- La négation de « il existe un être humain mesurant plus 3m20 de hauteur » est « tous les êtres humains mesurent moins de 3m20 de hauteur ».
- La négation de « $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n < m$ » est « $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{\forall m \in \mathbb{N}, n < m}$ » ou encore « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m$ ».

1.3 Raisonnements et démonstration

Nous allons maintenant expliquer comment démontrer certaines assertions à l'aide d'exemples.

Le quantificateur universel

Pour montrer une assertion du type « $\forall x \in E, P(x)$ », il faut :

- I) Prendre un $x \in E$ quelconque (« Soit $x \in E$ ») et**
- II) démontrer $P(x)$ (« blabla calcul [...] d'où $P(x)$ »).**

Exemple

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$.

- I) Soit $n \in \mathbb{N}$,
- II) $\left\{ \begin{array}{l} \text{par définition, } n \geq 0, \\ \text{donc } n \times n \geq 0 \times 0, \\ \text{or } 0 \times 0 = 0, \\ \text{d'où } n^2 \geq 0. \end{array} \right.$

Le quantificateur existentiel

Pour montrer une assertion du type « $\exists x \in E, P(x)$ », il y a plusieurs méthodes.

Directement.

- I) Deviner un élément $x_0 \in E$ qui va convenir,**
- II) puis montrer que, effectivement, $P(x_0)$ convient.**

Exemple

Montrons que $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$.

- I) Si je traduis l'assertion en français, on me demande de trouver un entier naturel plus petit que tous les autres. Je devine que 0 va convenir. Je pose donc $n_0 = 0$.

- II) Je veux montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq m$. Soit $m \in \mathbb{N}$ alors, par définition, $m \geq 0$ et j'ai donc fini.

En utilisant un théorème d'existence (par exemple le théorème des valeurs intermédiaires).

Exemple

Montrons que le polynôme $f(x) = x^5 + 4x - 2$ a une racine réelle, c'est à dire, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = 0$.

On a $f(1) = 3$ et $f(0) = -2$. Puisque f est une fonction continue sur $[0, 1]$, et $0 \in [-2, 3]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous indique qu'il existe $r \in [0, 1]$ tel que $f(r) = 0$.

Parmi les théorèmes d'existence on en distingue deux types ceux dits **constructifs** et les autres. Les théorèmes constructifs contiennent par définition, un élément explicite vérifiant la propriété ou un algorithme permettant de construire cet élément par exemple le théorème qui nous dit que pour tous entiers relatifs a, b , il existe un plus grand diviseur commun à a et b est constructif car il utilise l'algorithme d'Euclide.



–Attention–

Il est souvent plus difficile de montrer une assertion $\exists x, P(x)$ qu'une assertion $\forall x, P(x)$ car il faut avoir un peu d'intuition pour deviner quel x va convenir dans le premier cas.

Le quantificateur d'unicité

Pour montrer une assertion du type « $\exists! x \in E, P(x)$ », il y a plusieurs méthodes.

Directement.

- I) Deviner un élément $x_0 \in E$ qui va convenir,**
- II) puis montrer que, effectivement, $P(x_0)$ convient.**
- III) Prendre un deuxième élément $y_0 \in E$ tel que $P(y_0)$ et montrer que $x_0 = y_0$.**

Les deux premiers points consistent en la démonstration de l'existence. Le troisième point consiste en la démonstration de l'unicité.

Exemple

Montrons que $\exists! n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$.

- I) On devine que 0 convient.
- II) Je veux montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq m$. Soit $m \in \mathbb{N}$ alors, par définition, $m \geq 0$ et j'ai donc fini.
- III) Pour finir si n_0 est un autre entier naturel qui convient alors $n_0 \leq 0$ et de même $0 \leq n_0$ par suite, on en déduit que $n_0 = 0$. D'où l'unicité.

Par analyse-synthèse. Il s'agit d'un raisonnement en deux étapes.

- I) (Analyse). Supposer qu'un élément x vérifie $P(x)$ et en déduire que $x = x_0$ où x_0 est explicite.**
- II) (Synthèse) Montrer $P(x_0)$.**

Dans l'analyse, on suppose que l'on a un candidat et l'on montre qu'il est de telle ou telle forme explicite. Cela montre l'unicité car tous les candidats possibles sont égaux à un certain x_0 .

Par contre, on ne sait pas encore si le x_0 en question vérifie $P(x_0)$. À l'issue de l'analyse on a seulement dit que si un x vérifie $P(x)$ alors $x = x_0$ et l'on a donc unicité. Mais on a aussi un bon candidat pour l'existence : x_0 .

C'est la synthèse qui permet de montrer l'existence en vérifiant $P(x_0)$.

Le grand avantage de l'analyse-synthèse est qu'elle permet de montrer une existence sans avoir à deviner un candidat a priori.

Exemple

Soit $y \neq 1/2$, montrez qu'il existe un unique $x \neq 1/2$ tel que $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

I) (Analyse). Supposons d'abord qu'un tel x existe. Alors on a

$$(2x - 1)y = x + 1 \text{ et donc } 2xy - y = x + 1 \text{ et donc } (2y - 1)x = 1 + y \text{ et donc } x = \frac{1 + y}{2y - 1}.$$

II) (Synthèse) Notons maintenant $x = \frac{1+y}{2y-1}$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{x + 1}{2x - 1} &= \frac{\frac{1+y}{2y-1} + 1}{2\frac{1+y}{2y-1} - 1} \\ &= \frac{1 + y + 2y - 1}{2 + 2y - 2y + 1} \\ &= \frac{3y}{3} \\ &= y. \end{aligned}$$

D'où $x = \frac{1+y}{2y-1}$ convient.

Montrer une implication

Nous allons voir ici les méthodes pour montrer une assertion du type $A \Rightarrow B$. On a vu que $A \Rightarrow B$ était équivalent à $\bar{A} \text{ ou } B$.

Il y a deux possibilités pour la valeur de vérité de A , soit A est fausse et dans ce cas, au vue de la décomposition plus haut $A \Rightarrow B$ est automatiquement vraie. Sinon, A est vraie et il faut alors montrer que B est vraie. Autrement dit, on vient de donner notre première méthode pour démontrer une implication :

Directement.

I) Supposer l'hypothèse A vraie

II) puis montrer que la conclusion B est vraie (en utilisant que A est vraie et d'autres assertions vraies).

Exemple

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On veut montrer l'implication suivante $(\forall x \in E, x > 0) \Rightarrow (\forall x \in E, \exp(x) > 1)$.

I) Supposons que $(\forall x \in E, x > 0)$, autrement dit pour tout $x \in E, x > 0$.

- II) Montrons que $(\forall x \in E, \exp(x) > 1)$. On remarque que c'est une assertion avec un $\forall$ donc on commence par prendre $x \in E$. Par hypothèse, $x > 0$ et donc, par croissance de $\exp$, $\exp(x) > \exp(0)$ or $\exp(0) = 1$ donc $\exp(x) > 1$. D'où la conclusion.



–**Attention**–

L'implication ci-dessus est vraie même si E n'est pas inclus dans $]0, +\infty[$.

Par la contraposée : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$, on peut donc se contenter de

I) supposer que $\overline{B}$ est vraie

II) et d'en déduire que $\overline{A}$ est vraie.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on veuille montrer « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair ». On raisonne par contraposition (on remarquera que nier qu'un entier est pair revient à dire qu'il est impair). Supposons que n soit impair alors il s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et c'est donc sous la forme $2\ell + 1$ et c'est donc impair.



–**Attention**–

Il ne faut surtout pas confondre contraposée $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ et réciproque $B \Rightarrow A$.

Le choix de la méthode pour démontrer l'implication est la prérogative de celui qui fait la démonstration. Par défaut on peut toujours essayer la première méthode qui est directe et très simple. Si l'on a des soucis, on peut passer à la méthode et voir si cela marche mieux.

On peut aussi regarder la proposition B , par exemple s'il s'agit d'une proposition sous la forme $\exists x, P(x)$ alors elle sera difficile à montrer car il y a un $\exists$. On peut alors essayer de passer directement à la contraposée et, avec un peu de chance, $\overline{A}$ sera plus facile à démontrer.

La disjonction de cas

Commençons par montrer :

Proposition 13. Soit A et B deux assertions alors $((A \Rightarrow B) \text{ et } (\overline{A} \Rightarrow B)) \Leftrightarrow B$.

DÉMONSTRATION. On a :

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \text{ ou } B \text{ et } \overline{A} \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \text{ ou } B \Leftrightarrow A \text{ ou } B$$

en utilisant la reformulation de l'implication $\Rightarrow$ et le fait que $\overline{\overline{A}}$ soit équivalent à A . Ensuite :

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B) \text{ et } (\overline{A} \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\overline{A} \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } B) \text{ par substitution dans l'équivalence} \\ &\Leftrightarrow (\overline{A} \text{ et } A) \text{ ou } B \text{ par distributivité} \\ &\Leftrightarrow 0 \text{ ou } B \text{ car } \overline{A} \text{ et } A \text{ est faux} \\ &\Leftrightarrow B \text{ par définition de } \text{ou}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Ainsi, pour montrer une assertion B , on peut faire une disjonction de cas.

Disjonction de cas

- I) trouver une bonne proposition A pour faire la disjonction,**
- II) montrer $A \Rightarrow B$,**
- III) montrer $\bar{A} \Rightarrow B$.**

Il est difficile d'expliquer ce que va être une « bonne »² proposition mais l'idée est que plutôt que de démontrer B une seule fois, on peut démontrer B sachant que A est vraie et démontrer B sachant que A est faux. Concrètement cela donne une hypothèse supplémentaire dans chacun des cas (A dans le premier cas, $\bar{A}$ dans le second).

Exemple

Montrons que le carré de tout réel est positif ou nul, autrement dit que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on doit montrer que $x^2 \geq 0$. Ici on sait que multiplier une inégalité par un réel peut changer le sens de l'inégalité en fonction du signe du réel.

- I) Ainsi $A = \text{« } x \text{ est positif ou nul »}$ est un bon choix.
- II) Montrons $A \Rightarrow B$. Si A est vraie alors $x \geq 0$ et donc en multipliant par x cette inégalité on obtient $x^2 \geq 0$ (car x est positif).
- III) Montrons $\bar{A} \Rightarrow B$. Si A est faux alors $x < 0$ et donc en multipliant par x cette inégalité, on obtient $x^2 > 0$ et donc $x^2 \geq 0$.

Montrer une équivalence

Il y a deux méthodes pour montrer une équivalence du type $A \Leftrightarrow B$.

Raisonner par équivalence.

- I) on choisit C une proposition intermédiaire,**
- II) on montre $A \Leftrightarrow C$ et**
- III) on montre $C \Leftrightarrow B$.**

La validité de cette méthode repose sur la transitivité de l'équivalence qui stipule que $(A \Leftrightarrow C \text{ et } C \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

Bien sûr, on peut utiliser autant de propositions intermédiaires que l'on veut pourvu qu'elles soient toutes équivalentes.

Exemple

Montrons que $2x + 2 = 4$ si et seulement si $x = 1$.

- I) La proposition intermédiaire va être $2x = 2$.
- II) D'une part $2x + 2 = 4 \Leftrightarrow 2x = 2$ car l'on passe d'une équation à l'autre en soustrayant/additionnant 2.
- III) D'autre part, $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ car l'on passe d'une équation à l'autre en multipliant/divisant par 2.

2. Le choix de cette proposition est d'autant plus judicieux que les démonstrations de $A \Rightarrow B$ et de $\bar{A} \Rightarrow B$ sont différentes.

–Attention–

Il faut s'assurer que A soit équivalente à C et C soit équivalente à B . En pratique beaucoup de gens écrivent une équivalence quand il n'y a, en réalité, qu'une seule implication.

Raisonner par double-implication.

- I) on montre $A \Rightarrow B$ et**
II) on montre $B \Rightarrow A$.

La validité de cette méthode repose sur le fait que $(A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B$.

Exemple

Montrons que $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

- I) Supposons d'abord que $x^2 = 0$ alors $x \times x = 0$ et donc l'un des facteurs au moins est nul, autrement dit $x = 0$ ou $x = 0$ d'où $x = 0$.
 II) Réciproquement, si $x = 0$ alors $x^2 = x \times x = 0 \times 0 = 0$.

La méthode 1 a l'avantage d'être plus rapide que la seconde méthode. Le problème est qu'il arrive souvent de prétendre qu'il y a une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication. Ainsi, en cas de doute, il vaut mieux prendre la seconde méthode.

Raisonnement par l'absurde

On rappelle que 0 symbolise le faux dans notre logique. Commençons par montrer la proposition suivante :

Proposition 14. *Soit A une assertion, alors :*

$$(\overline{A} \Rightarrow 0) \Leftrightarrow A.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} (\overline{A} \Rightarrow 0) &\Leftrightarrow \overline{\overline{A} \text{ ou } 0} \text{ en ré-écrivant l'implication} \\ &\Leftrightarrow A \text{ ou } 0 \text{ en utilisant le fait que } \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A \\ &\Leftrightarrow A \text{ par définition de } \text{ou}. \end{aligned}$$

■

Ainsi la méthode du raisonnement par l'absurde pour montrer A est :

Raisonnement par l'absurde.

- I) On commence par supposer que A est fausse,**
II) ensuite, on utilise l'hypothèse $\overline{A}$ pour en déduire quelque chose dont on sait qu'il est faux.

Exemple

Supposons que l'on veuille montrer que $\sqrt{2}$ ne soit pas un nombre rationnel. Nous allons le faire par l'absurde.

- I) Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe p et q des entiers relatifs sans facteur commun tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
- II) On passe au carré l'égalité ci-dessus, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$ et donc $2q^2 = p^2$. Puisque 2 est un nombre premier divisant p^2 , il divise p et donc $p = 2r$ avec r un entier relatif. On en déduit que $2q^2 = 4r^2$ et donc $2r^2 = q^2$ et donc 2 divise q^2 et donc 2 divise q . Ceci est impossible car p et q étaient choisis, à la base, comme n'ayant pas de facteur commun.

Raisonnement par l'absurde est périlleux logiquement. Il faut utiliser une hypothèse dont on sait qu'elle est fausse. Mais c'est un raisonnement très naturel à adopter :

Exemple

Alice dit à Bob « ma voiture est la plus rapide au monde » et Bob lui répond « si c'était vrai tu n'arriverais pas systématiquement en retard au travail ». Ainsi Bob suppose que la voiture d'Alice est la plus rapide au monde et en déduit logiquement que Alice devrait arriver au travail à l'heure. Or, elle n'arrive pas à l'heure c'est donc que l'hypothèse de départ était fausse.

**–Attention–**

Raisonnement par l'absurde ne donne droit qu'à une seule absurdité. Tout le reste du raisonnement doit être rigoureusement exact.