Exercice 1

Dans cet exercice et UNIQUEMENT dans cet exercice, aucune justification n'est demandée

Pour chacun des nombres suivants, indiquer dans la colonne correspondante l'écriture la plus simplifiée possible puis dans la colonne suivante, préciser le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

Nombre	Écriture la plus simplifiée de ce nombre	Plus petit ensemble auquel il appartient
$A = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\ \right)^2}{\sqrt{3}-2}$	$A = \dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-2} = -2$	$\mathbb{Z}$
$B = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{48}}{\sqrt{6}}$	$B = \dfrac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$	$\mathbb{R}$
$C = \left(\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}\right)^2$	$D = 4-\sqrt{12}-2\sqrt{4-\sqrt{12}}\times\sqrt{4+\sqrt{12}}+4+\sqrt{12} = 8-2\sqrt{(4-\sqrt{12})(4+\sqrt{12})} = 8-2\sqrt{16-12} = 8-2\times 2 = 4$	$\mathbb{N}$
$D = \dfrac{\sqrt{0,01}}{10^{-4}}$	$F = \dfrac{0,1}{10^-4} = \dfrac{10^4}{10} = 10^3$	$\mathbb{N}$
$E = \sqrt{1+\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{1-\dfrac{7}{12}}$	$H = \sqrt{(1+\dfrac{2}{3})(1-\dfrac{7}{12})} = \sqrt{1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{12}-\dfrac{2\times 7}{3\times 12}} = \sqrt{\dfrac{36+24-21-14}{36}} = \sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{5}{6}$	$\mathbb{Q}$
$F = \dfrac{(3\times 5)^2 2^3}{5^4}$	$J = \dfrac{3^2\times 5^2\times 2^3}{5^4} = \dfrac{9\times 8}{5^2} = \dfrac{72}{25}$	$\mathbb{D}$
$G = \ln(2+\sqrt{3})^5+\ln(2-\sqrt{3})^5$	$K = \ln\Big((2+\sqrt{3})^5\times(2-\sqrt{3})^5\Big) = \ln\Big((2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})\Big)^5 = 5\ln(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3}) = 5\ln(4-3) = 5\ln 1 = 0$	$\mathbb{N}$
$H = \ln(e^2\sqrt{e})$	$L = \ln e^2+\ln\sqrt{e} = 2+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$	$\mathbb{D}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\lfloor 2x^2+1 \rfloor = 7$
   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x^2+1\rfloor = 7 \Leftrightarrow 7 \leq 2x^2+1 < 8 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2-6$ et $2x^2-7<0$.
   Or $2x^2-6$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ car : $2x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{6}{2} = 3$.
   Et comme $a = 2 > 0$, on en déduit que $0 \leq 2x^2-6 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$.
   De même : $2x^2 - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{\dfrac{7}{2}}, \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right[$.
   Conclusion : $S = \left]-\sqrt{3}, -\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right[$.

2. $\sqrt{2-x} = x$. Cette équation est définie sur $]-\infty, 2]$ car $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

   De plus, comme la fonction racine carrée est positive et que l'on doit avoir $x = \sqrt{2-x}$, seuls les nombres positifs peuvent être solutions de cette équation.
   Sur $]-\infty, 2],\ \sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2-x = x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$. -1 est racine évidente de ce polynôme et comme le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$, l'autre racine est -2.
   Or -2 ne peut pas être solution car $\sqrt{2-(-2)} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.
   Par contre, 1 est bien solution car $\sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$.
   D'où : $S = \{1\}$

3. $|x+3| \leq 5$

   $\forall x \in \mathbb{R},\ |x+3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x+3 \leq 5 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 2$ donc $S = [-8, 2]$

4. $|x+1| + |x-3| = 4$

   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in]-\infty, -1],\ |x+1|+|x-3| = 4 \Leftrightarrow -x-1-x+3 = 4 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$
   $\forall x \in [-1, 3],\ |x+1|+|x-3| = 4 \Leftrightarrow x+1-x+3 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ donc tous les réels x de cet intervalle sont solutions.
   $\forall x \in [3, +\infty[,\ |x+1|+|x-3| = 4 \Leftrightarrow x+1+x-3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$
   Bilan : $S = [-1, 3]$

5. $\left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)^3 = e^2 \times e^{2x}$

   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x \neq 0$, $\left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)^3 = e^2 \times e^{2x} \Leftrightarrow e^{(\frac{1}{x}-1)\times 3} = e^{2+2x} \Leftrightarrow$ $3(\dfrac{1}{x}-1) = 2+2x \Leftrightarrow \dfrac{3}{x} - 3 = 2+2x \Leftrightarrow 5+2x-\dfrac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow 5x+2x^2-3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-3 = 0$. Ce polynôme du second degré admet $\Delta = b^2-4ac = 5^2 - 4\times 2\times(-3) = 25+24 = 49 > 0$ donc il admet deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$ pour racines.
   D'où : $S = \{-3, \dfrac{1}{2}\}$

6. $\ln(3x^2-5x) \leq \ln x + \ln 2$

   L'ensemble de définition de cette équation est : $]\dfrac{5}{3}; +\infty[$ car : on doit avoir $x > 0$ et $3x^2-5x > 0 \Leftrightarrow$ $x(3x-5) > 0 \Leftrightarrow 3x-5 > 0$ car $x > 0$ donc on doit avoir $x > \dfrac{5}{3}$
   Et : pour tout $x > \dfrac{5}{3},\ \ln(3x^2-5x) \leq \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x^2-5x) \leq \ln(2x) \Leftrightarrow 3x^2-5x \leq 2x \Leftrightarrow$ $3x^2-7x \leq 0 \Leftrightarrow x(3x-7) \leq 0$.
   Or ce polynôme du second degré est négatif (signe de $-a$) entre ses racines (qui sont 0 et $\dfrac{7}{3}$).
   D'où l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\left]\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}\right]$.

7. $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 5 \leq 0$

L'ensemble de définition de cette équation est : $]0;+\infty[$.
Pour $x > 0$, posons $X = \ln x$.
Alors $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 5 = 0 \Leftrightarrow -1 \leq X \leq \dfrac{5}{2}$ car ce polynôme du second degré admet pour discriminant : $\Delta = 49$; il admet donc deux racines qui sont : -1 et $\dfrac{5}{2}$.
Comme $a = 2$, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $2X^2 - 3X - 5 \leq 0$ est $[-1; \dfrac{5}{2}]$.
D'où $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \ln x \leq \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow e^{-1} \leq x \leq e^{\frac{5}{2}}$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Bilan : l'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $\left[\dfrac{1}{e}, e^{\frac{5}{2}}\right]$.

8. $2^x = 3^{2x+1}$

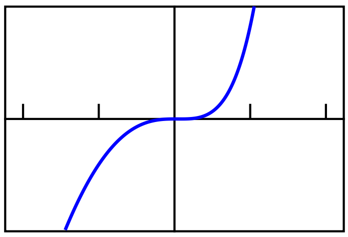
Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow e^{x\ln 2} = e^{(2x+1)\ln 3} \Leftrightarrow x\ln 2 = 2x\ln 3 + \ln 3 \Leftrightarrow x\ln 2 - 2x\ln 3 = \ln 3 \Leftrightarrow x(\ln 2 - 2\ln 3) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2 - 2\ln 3}$
Donc $S = \{\dfrac{\ln 3}{\ln 2 - 2\ln 3}\}$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $[-2,2]$ par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{8}x^2$.

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Partie A : Conjectures



À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

a. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

b. le sens de variations de f sur $[-2, 2]$?

Partie B : Validité de la première conjecture

Résoudre dans $[-2,2]$ l'inéquation $f(x) > 0$. Que peut-on en déduire concernant la première conjecture ?
Pour tout x réel, $f(x) = x^2(e^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{8})$.
Comme $x^2 > 0$, quel que soit x le signe de $f(x)$ est celui de $(\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{8})$.
Or $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{8} > 0 \iff \mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} > \dfrac{9}{8} \iff x - \dfrac{1}{4} > \ln\dfrac{9}{8}$ (par croissance de la fonction ln) et enfin $x > \dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{9}{8}$.
Conclusion : La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]\dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{9}{8}\ ;\ +\infty[$, en dessous ailleurs, et la courbe coupe l'axe des abscisse en deux points qui sont les points d'abscisses $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{9}{8}$.
La première conjecture est donc fausse car $\mathcal{C}$ est au dessous de $(x'x)$ sur l'intervalle $[0; \dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{9}{8}]$.

Partie C : Validité de la seconde conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in [-2,2]$, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $[-2,2]$ par $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{4}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de produits de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ (en effet : la fonction $x \mapsto e^{x-\frac{1}{4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables du type e^u et la fonction $x \mapsto x^2e^{x-\frac{1}{4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables)
Et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} + x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - 2x \times \dfrac{9}{8} = x(x+2)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{4}x = x\left[(x+2)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} - \dfrac{9}{4}\right] = xg(x)$.

2. Étude du signe de $g(x)$ pour $x \in [-2, 2]$

a. Étudier le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto (x+2)e^{x-\frac{1}{4}}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et pour tout réel x, on a :

$g'(x) = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} + (x+2)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} = (x+3)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}}$.

Quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{4}} > 0$ et $x+3 > 0$, donc $g'(x)$ est toujours strictement positif sur $[-2, 2]$.

On déduit que g croissante sur $[-2, 2]$.

x	-2		2
$g'(x)$		$+$	
g	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$4e^{\frac{7}{4}} - \frac{9}{4}$

b. Donner la valeur de $g(\frac{1}{4})$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$$g(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4}+2)e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0.$$

- Comme g est strictement croissante sur $[-2, \frac{1}{4}[$ et que $g(\frac{1}{4}) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \in [-2, \frac{1}{4}[,\ g(x) > 0$.
- Comme g est strictement croissante sur $]\frac{1}{4}, 2]$ et que $g(\frac{1}{4}) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \in]\frac{1}{4}, 2],\ g(x) < 0$.
- et donc $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

3. Sens de variations de la fonction f sur $[-2, 2]$.

a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

On a vu que $f'(x) = xg(x)$. On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	-2		0		$1/4$		2
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. En déduire le sens de variations de la fonction f.

Comme $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ \frac{1}{4}[$ la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle et croissante ailleurs.

c. Déterminer la valeur exacte de $f(\frac{1}{4})$.

$$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2(e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} - \frac{9}{8}) = \frac{1}{16}(1 - \frac{9}{8}) = -\frac{1}{128}$$

d. Que pensez-vous de votre seconde conjecture ? Expliquer.

La seconde conjoncture est fausse puisque f n'est pas croissante sur $[-2\ ;\ 2]$.

On a été induit en erreur car $f(\frac{1}{4})$ est très proche de 0 : $-\frac{1}{128}$ est de l'ordre de grandeur de $-\frac{1}{100} = -0,01$.

Exercice 4 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^{2n+1}-2^{2n}}{4^{n+1}+4^n}=\dfrac{1}{5}$.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^{2n+1}-2^{2n}}{4^{n+1}+4^n}=\dfrac{2^{2n}\times 2-2^{2n}}{4\times 4^n+4^n}=\dfrac{2^{2n}}{5\times 4^n}=\dfrac{(2^2)^n}{5\times 4^n}=\dfrac{4^n}{5\times 4^n}=\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$: cette affirmation est donc vraie

2. Pour tous réels a et b strictement positifs : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$

   Pour tous réels a et b strictement positifs :
   $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2=\dfrac{a}{b}-2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}-2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$: cette affirmation est donc vraie

3. Pour tout réel $x\neq -2$, $\dfrac{4}{(x+2)^2}-1=\dfrac{-x^2-4x-8}{(x+2)^2}$.

   Pour tout réel $x\neq -2$, $\dfrac{4}{(x+2)^2}-1=\dfrac{4-(x+2)^2}{(x+2)^2}=\dfrac{4-(x^2+4x+4)}{(x+2)^2}=\dfrac{4-x^2-4x-4}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x}{(x+2)^2}\neq$ $\dfrac{-x^2-4x-8}{(x+2)^2}$: cette affirmation est donc fausse.

4. La fonction f définie par $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ n'est ni paire ni impaire.

   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel $x\in\mathbb{R}, f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-f(x)$.
   La fonction f est donc impaire : l'affirmation est fausse.

5. $\ln\sqrt{\dfrac{1}{18}}=-\dfrac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)$

   $-\dfrac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)=-\dfrac{1}{2}\ln(2\times 3)=-\dfrac{1}{2}\ln 6=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{6}=\ln\sqrt{\dfrac{1}{6}}\neq\ln\sqrt{\dfrac{1}{18}}$: cette affirmation est donc fausse.

6. Les fonctions f et g définies par : $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ et $g(x)=\ln(1+\dfrac{1}{x})$ sont égales.

   Cette affirmation est fausse car ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition donc ne peuvent pas être égales.
   En effet, f est définie sur $]0;+\infty[$ et g est définie pour tout réel x tel que $1+\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x}>0$.
   Le quotient $\dfrac{x+1}{x}$ ayant même signe que le polynôme du seconde degré $x(x+1)$ dont les racines sont 0 et 1 et pour lequel $a=1>0$, g est définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

7. Pour tout réel $x\in[1,4]$, $\dfrac{1}{10}\leq\dfrac{2}{x^2+4}\leq\dfrac{2}{5}$.

   Pour tout réel $x\in[1,4]$, $1\leq x^2\leq 16$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $5\leq x^2+4\leq 20$ et alors $\dfrac{1}{5}\geq\dfrac{1}{x^2+4}\geq\dfrac{1}{20}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   On obtient alors : $\dfrac{2}{5}\geq\dfrac{2}{x^2+4}\geq\dfrac{2}{20}$ soit $\dfrac{1}{10}\leq\dfrac{2}{x^2+4}\leq\dfrac{2}{5}$: cette affirmation est donc vraie.

8. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a pour inverse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

   L'inverse de $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ est $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$: cette affirmation est donc vraie.

Exercice 5

f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Étudier les variations de f et donner la valeur exacte de son maximum.

   f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient bien défini de fonctions dérivables et pour tout réel $x>0,\ f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\times\ln x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$. Or $x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$. Et $\forall x>0,\ 1-2\ln x>0\Leftrightarrow 2\ln x<1\Leftrightarrow \ln x<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x<e^{\frac{1}{2}}$.

   f est donc croissante sur $]0,\sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e},+\infty[$.

   Et son maximum est $f(\sqrt{e})=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{e}=\dfrac{1}{2e}$.

2. On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.

   a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

   $f(1)=\dfrac{\ln 1}{1^2}=0$ et $f'(1)=\dfrac{1-2\ln 1}{1^2}=1$ donc une équation de T est : $y=x-1$.

   b. Tracer T sur le graphique ci-contre.

3. Soit $M(a;f(a))$ un point de $\mathscr{C}_f$ avec $a\in]0;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y=x$ si et seulement si : $a^3-1+2\ln a=0$ [1]

   T_a a pour coefficient directeur $f'(a)=\dfrac{1-2\ln a}{a^3}$. Donc T_a est parallèle à la droite d'équation $y=x$ si et seulement si : $f'(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{1-2\ln a}{a^3}=1\Leftrightarrow 1-2\ln a=a^3\Leftrightarrow a^3-1+2\ln a=0$ [1]

4. À partir de l'équation [1],démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.

   Indication : on pourra étudier la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

   g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x>0,\ g'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}>0$ sur $]0;+\infty[$.g est donc croissante sur $]0;+\infty[$ et ne peut donc s'annuler qu'une seule fois. Or $g(1)=1^3-1+2\ln 1=0$ donc A est bien le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.