1 Généralités sur les fonctions

1.1 Domaine de définition

Définition : le **domaine de définition**, noté généralement $\mathscr{D}_f$, d'une fonction f est l'ensemble des réels x tels que l'on puisse définir le nombre $f(x)$. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}_f$

la fonction f, de domaine de définition $\mathscr{D}_f$, est notée ainsi : $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Les trois fonctions « à problème » à connaître :

- la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$
- la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$
- la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemples :

Fonction	contrainte	$\mathscr{D}_f$
$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$	$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
$f(x) = \sqrt{x-3}$	$x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$	$[3, +\infty[$
$f(x) = \ln(2-x)$	$2 - x > 0 \Leftrightarrow 2 > x$	$]-\infty, 2[$
$f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$	$x^2+3x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \notin]-2; -1[$	$]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[$
$f(x) = \ln(x^2-6x+9)$	$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$	$\mathbb{R}^*$

1.2 Parité

Définition : Une partie D de $\mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à zéro** lorsque :

$$\forall x \in \mathscr{D}, \quad -x \in \mathscr{D}$$

Par exemple les ensembles $\mathbb{R}^*,]-5, 5[, [-4, -2] \cup [2, 4]$ sont symétriques par rapport à zéro.
Par contre, $]-1, 1]$ et $]-\infty, -4] \cup [4, 9]$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

Définition : soit f une fonction, définie sur $\mathscr{D}_f$, avec $\mathscr{D}_f$ **symétrique par rapport à zéro**. On dit que f est

- **paire** lorsque : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$
- **impaire** lorsque : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque : pour démontrer que f est paire (adapter pour f impaire).
Par exemple avec $f(x) = \ln(1+x^2)$:

▷ Vérifier la symétrie du domaine de définition :
ici f est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 0$ et donc $\ln(1+x^2)$ est bien défini
donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 ;

▷ Ecrire : « soit $x \in \mathscr{D}_f$ », puis démontrer que $f(-x) = f(x)$
ici $f(-x) = \ln(1 + (-x)^2) = \ln(1 + x^2) = f(x)$

▷ Conclure : on a démontré que $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = f(x)$(et $\mathscr{D}_f$ symétrique), donc f est paire.

Exemples :

Fonction	$\mathscr{D}_f$	$f(-x)=?$	parité
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$	paire
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$	impaire
$f(x)=e^x-e^{-x}$	$\mathbb{R}^*$	$f(-x)=e^{-x}-e^{-(-x)}=e^{-x}-e^x=-f(x)$	impaire
$f(x)=\dfrac{x^5}{x^4+3x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$f(-x)=\dfrac{(-x)^5}{(-x)^4+3(-x)^2+1}=-f(x)$	impaire
$f(x)=x^3+x^2$	$\mathbb{R}$	$f(-1)=0\neq 2=f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$	aucune

Propriété : la courbe représentative
- d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1.3 Monotonie

Définition : soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et E une partie de $\mathscr{D}_f$, on dit que
- f est **croissante sur** E (respectivement **décroissante sur** E) si :

$$\forall a_1\in E, \forall a_2\in E, \quad (a_1\leqslant a_2 \Rightarrow f(a_1)\leqslant f(a_2)) \quad \text{resp.}(a_1\leqslant a_2\Rightarrow f(a_1)\geqslant f(a_2))$$

- f est **strictement croissante sur** E (resp. **strictement décroissante sur** E) si :

$$\forall a_1\in E, \forall a_2\in E, \quad (a_1< a_2 \Rightarrow f(a_1)< f(a_2)) \quad \text{resp.}(a_1< a_2\Rightarrow f(a_1)> f(a_2))$$

- f est (strictement) **monotone sur** E si elle est (strictement) croissante sur E, ou bien (strictement) décroissante sur E

Exemples :

Fonction	$\mathscr{D}_f$	croissance ou décroissance	monotone
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	croissante : $x\leqslant y\Rightarrow x^3\leqslant y^3$	monotone
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$	non monotone
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	décroissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$	non monotone

⚠ **Attention** $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-1<1$ et $f(-1)<f(1)$
Elle l'est sur $]-\infty,0[$ et sur $]0;+\infty[$

Remarques :
- les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sur E sont constantes sur E ;
- la somme de deux fonctions croissantes sur E est croissante sur E ;
- l'outil privilégié pour démontrer la monotonie sera la dérivée (voir plus bas).

Par contre on utilisera la monotonie pour justifier des transformations d'inégalités :

$$0\leqslant x\leqslant 12\Rightarrow x^2\leqslant 144 \text{ car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

1.4 Majorants, minorants, extremums

Définition : soit f une fonction définie sur E et soit M et m des réels

- on dit que f est **majorée par** M sur E ou on dit que M est un **majorant de** f **sur** E lorsque : pour tout $x \in E$, on a $f(x) \leqslant M$
- on dit que f est **minorée par** m sur E ou on dit que m est un **minorant de** f sur E lorsque : pour tout $x \in E$, on a $f(x) \geqslant m$
- si f admet un majorant (respectivement un minorant), on dit que f est **majorée** (resp. **minorée**)
- on dit que f est **bornée** sur E lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Définition : soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in E$, on dit que

- f admet un **maximum** en a si : $\forall x \in E, \quad f(x) \leqslant f(a)$
  la valeur $f(a)$ est le **maximum** de f
- f admet un **minimum** en a si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geqslant f(a)$
  la valeur $f(a)$ est le **minimum** de f
- f admet un **extremum** lorsque f admet soit un maximum, soit un minimum en a

Remarques : on parle aussi de **minimum ou maximum local** (et donc d'extremum local), lorsqu'une fonction admet un minimum ou un maximum sur une partie de l'ensemble de définition.
Pour lever une éventuelle ambiguïté, on précise parfois « maximum global » (« ou minimum global ») pour parler du maximum (ou du minimum).

Exemples :

Fonction	minorant	minimum	majorant	maximum
$f(x) = x^2$	$-10, -1, 0\dots$	0	non	non
$f(x) = x^3$	non	non	non	non
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	non	non	non	non
$f(x) = \ln x$	non	non	non	non
$f(x) = e^x$	$-1\,000, -6, 0$	non	non	non
$f(x) = \sin(x)$	$-150, -12, -1\dots$	-1	$1, 15, 72\dots$	1

Exemples et méthode : on s'appuie sur les tableaux de variations

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est bornée, elle possède un maximum en 0, qui vaut 1, mais elle ne possède pas de minimum.
   En effet, $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ donc f' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$
   de fait f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle admet un maximum pour $x = 0$ qui vaut $f(0) = 1$
   de plus f est strictement positive (0 est la limite en $-\infty$ et $+\infty$ mais n'est jamais atteint).
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x^5}{5} + x^4 - 2x^2 - 4x + 1$
   alors $f'(x) = 4x^4 + 4x^3 - 4x - 4 = 4(x^4 + x^3 - x - 1) = 4(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$
   de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   donc f admet un maximum local en -1, un minimum local en 1, pas d'extremum global.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions trinômes du second degré

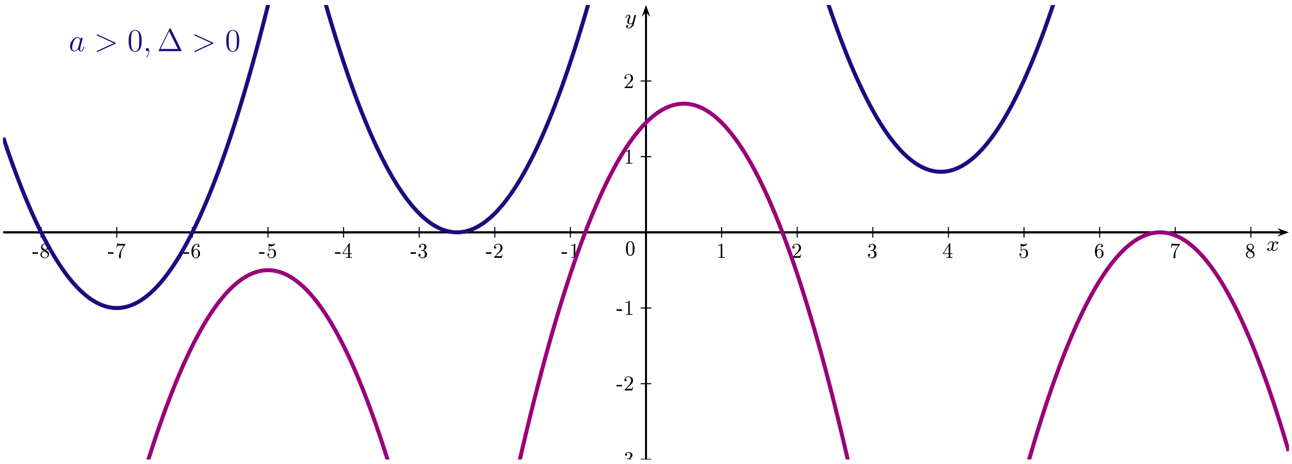
Définition : Soit a, b, et c trois réels, tels que $a \neq 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- on dit que f est une **fonction trinôme du second degré**, ou bien que f est une **fonction polynôme de degré** 2.
- le réel $b^2 - 4ac$ est noté Δ, et appelé le **discriminant** du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cf. les rappels pour les propriétés sur les racines et la factorisation.

La courbe représentative d'une fonction polynome de degré 2 est une parabole, orientée vers le haut lorsque $a > 0$, et orientée vers le bas lorsque $a < 0$.



2.2 Le logarithme népérien

Définition et propriété : on appelle fonction **logarithme (népérien)**, et on note ln l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Autrement dit :

- ln est définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$

Propriété : ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Propriétés de calcul : avec $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
4) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$
5) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Propriété : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(t) = x$

2.3 La fonction exponentielle

Définition :
- pour $x \in \mathbb{R}$, on note e^x, ou encore $\exp(x)$, l'unique $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(t) = x$. Alors,
- on peut définir la fonction exponentielle, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$, qui à $x \in \mathbb{R}$ associe e^x.

Remarque : par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

Propriété : avec $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $x \in \mathbb{R}$

1) $\ln(t) = x \iff t = \exp(x)$
2) en particulier $\ln(t) = 1 \iff t = \exp(1)$, le réel $\exp(1)$ est noté e, et on a $e \simeq 2,718$.
3) $e^0 = 1$
4) $\ln(e^x) = x \quad$ et $\quad e^{\ln(t)} = t$

Propriétés de calcul :

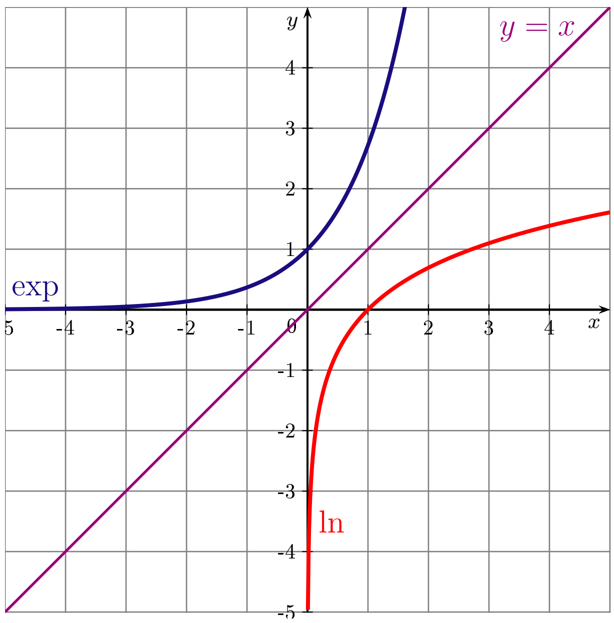
1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Propriété : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\exp' = \exp$$

donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriété : les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



2.4 Fonction valeur absolue

Définition : la fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, où

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples : $|1| = 1 \qquad |-7| = 7 \qquad |0| = 0$

Propriétés :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|$
3) Soit a et b deux réels. Alors $|ab| = |a| \times |b|$
4) Pour $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|a^n| = |a|^n$
5) Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$, alors $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

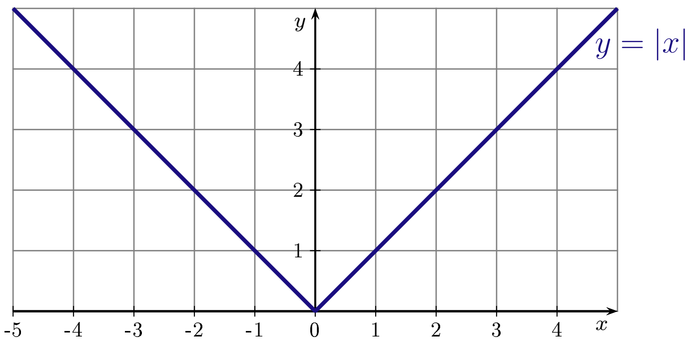
⚠ **Attention** $|a+b| \neq |a| + |b|$

Un contre-exemple pour s'en convaincre : $|-1+2| = |1| = 1$ qui est différent de $|-1|+|2| = 1+2 = 3$

Propriétés :

1) la fonction valeur absolue est paire.
2) la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Remarque : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, on verra qu'elle n'est pas dérivable en 0



Propriété : pour x réel et $\alpha \geqslant 0$, on a : $|x| = \alpha \iff (x = \alpha \quad \text{ou} \quad x = -\alpha)$

Propriété : avec α un réel positif ou nul et x un réel

1) $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$
2) $|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$
3) $|x| \geqslant \alpha \iff (x \geqslant \alpha \quad \text{ou} \quad x \leqslant -\alpha)$
4) pour a et b des réels, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ cette inégalité est appelée **l'inégalité triangulaire**.

2.5 Fonctions puissances entières

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit **la fonction puissance** n par $p_n(x) = x^n$

Propriété : soit $n \in \mathbb{Z}$,

- pour $n \geqslant 0$, la fonction p_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- pour $n < 0$, la fonction p_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- si $n \neq 0$, on a $p_n'(x) = nx^{n-1}$ et cette expression est valable :
  - ▷ pour tout x si $n \geqslant 0$
  - ▷ pour $x \neq 0$ si $n < 0$

Exemple : pour $x \neq 0$, on pose $h(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$
alors h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour $x \neq 0$, $h'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

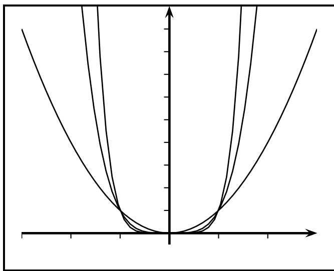
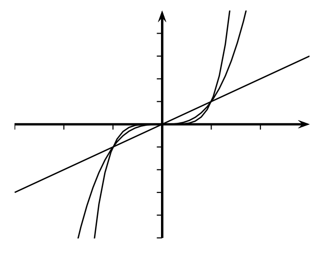
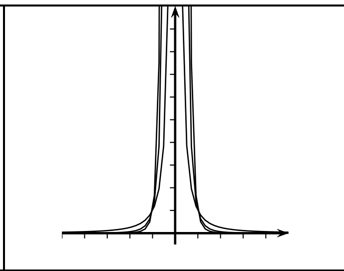
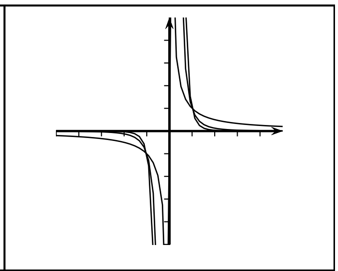
Remarque : attention les formules de dérivation ci-dessus ne sont pas valables pour $n = 0$
La fonction p_0 est constante égale à 1, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_0'(x) = 0$

Propriété : soit $n \in \mathbb{Z}$,

- Parité : si n est pair, la fonction p_n est paire. Si n est impair, la fonction p_n est impaire.
- Monotonie :
  - ▷ pour $n > 0$:
    si n est pair, p_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
    si n est impair, p_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  - ▷ pour $n < 0$:
    si n est pair, p_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
    si n est impair, p_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemples : $x \mapsto x^6, x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ sont des fonctions paires et $x \mapsto x^{11}, x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ des fonctions impaires.
$x \mapsto x^6, x \mapsto x^{11}, x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ suivent respectivement les mêmes variations que $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Représentation graphique :

			
n pair et $n \geqslant 2$	n impair et $n \geqslant 1$	n pair et $n \leqslant -2$	n impair et $n \leqslant -1$
exemples $x \mapsto x^2$ à x^6	exemples $x \mapsto x$ à x^5	exemples $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ à $\dfrac{1}{x^6}$	exemples $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à $\dfrac{1}{x^5}$

2.6 Fonctions puissances quelconques

La propriété du logarithme : $\ln(a^n) = n\ln(a)$ entraine, en composant par l'exponentielle, que pour tout réel a et pour tout entier n :

$$a^n = e^{n\ln(a)}$$

Cela nous permet de donner une nouvelle définition de la notion de puissance pour des valeurs non entières (et **pour** $x > 0$) :

Définition : soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$)

1. pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle x **puissance** α et on note x^α le réel $e^{\alpha\ln(x)}$
2. on définit alors la fonction puissance α, par $\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} \end{array}$

⚠ **Attention**, cette définition n'est valable que pour $x > 0$

Propriétés : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \quad \text{fois}} = e^{n\ln(x)}$
2. $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$
3. $x^{(\alpha+\beta)} = x^\alpha x^\beta \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \qquad \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

$$1^\alpha = 1 \quad \text{et} \quad x^0 = 1$$

Remarques :

1. signifie que la définition générale des puissances peut être étendue aux puissances entières (pour un nombre positif) ;
3. signifie que, avec cette définition, on retrouve toutes les propriétés de calcul des puissances entières.

Avec cette définition, on trouve aussi $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ puisque $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^1 = x = (\sqrt{x})^2$

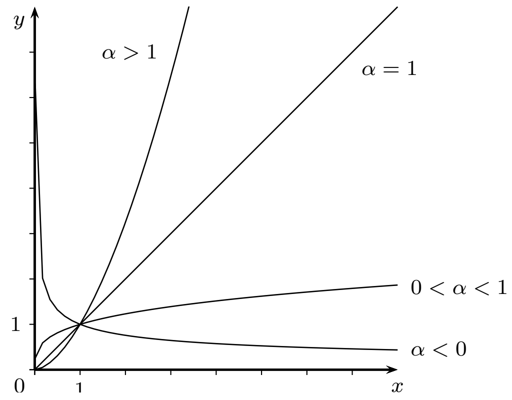
Propriétés : soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1) la fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
2) si $\alpha > 0$, la fonction puissance α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
3) si $\alpha < 0$, la fonction puissance α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarques :

- φ_0, la fonction « puissance 0 » est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$;
- on retrouve la formule de dérivation pour les puissances entières (valable sur $\mathbb{R}$), mais **attention**, elle n'est valable ici que sur $\mathbb{R}_+^*$;
- graphiquement, on distingue 3 familles de courbe : $\alpha > 1 \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \quad ; \quad \alpha < 0$

Représentation graphique :



2.7 Fonctions $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

On peut extrapoler encore un peu plus cette définition de puissance :

Définition : avec u et v deux fonctions et pour tout réel x tel que $u(x) > 0$, on définit l'expression $u(x)^{v(x)}$ par $\quad u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$

Exemple : soit f définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par $f(x) = x^x$

Déterminer $\mathscr{D}_f$ et étudier les variations de f sur $\mathscr{D}_f$

Par définition f est bien définie dès lors que $x > 0$ et vaut $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$

c'est-à-dire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x\ln(x)$, de plus pour tout $x > 0, u'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

de fait pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (\ln(x)+1)e^{u(x)} = (\ln(x)+1)x^x$

donc $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x)+1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$

donc f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ et de manière analogue f est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$

2.8 Fonction racine carrée

Définition :

- pour $y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{y}$ est l'unique $x \geqslant 0$ tel que $x^2 = y$
- la fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$

Propriétés :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ $\qquad$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$

Remarque : le point 2) permet d'illustrer la perte d'équivalence quand on élève une égalité au carré

par exemple, pour $x > 0, x = \sqrt{x} + 2 \iff x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow (x-2)^2 = x$

on ne peut écrire l'équivalence car $(x-2)^2 = x \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x}$ est faux

par contre $(x-2)^2 = x \Rightarrow |x-2| = \sqrt{x}$ est vraie

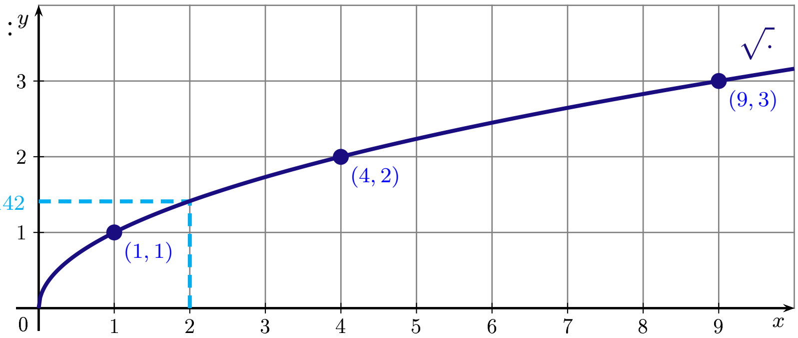
Propriétés :

- la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$
- la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Propriété : pour $x > 0$, on a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Remarque : avec notre définition $0^{\frac{1}{2}}$ n'a pas de sens, alors que $\sqrt{0} = 0$

Représentation graphique :



2.9 Fonction partie entière

Définition : on appelle fonction **partie entière** la fonction :

$$\lfloor . \rfloor : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} & & \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor & = & n \end{array} \qquad \text{avec} \quad n \leqslant x < n+1$$

On dit aussi que la **partie entière** de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x

Remarque : cette définition sous-entend que l'entier n est unique, ce qui est le cas.

Exemples : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$ $\quad \lfloor \pi \rfloor = 3$ $\quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$
$\lfloor 1 \rfloor = 1$ $\quad \lfloor e \rfloor = 2$ $\quad \lfloor -1,5 \rfloor = -2$ $\quad \lfloor n \rfloor = n$

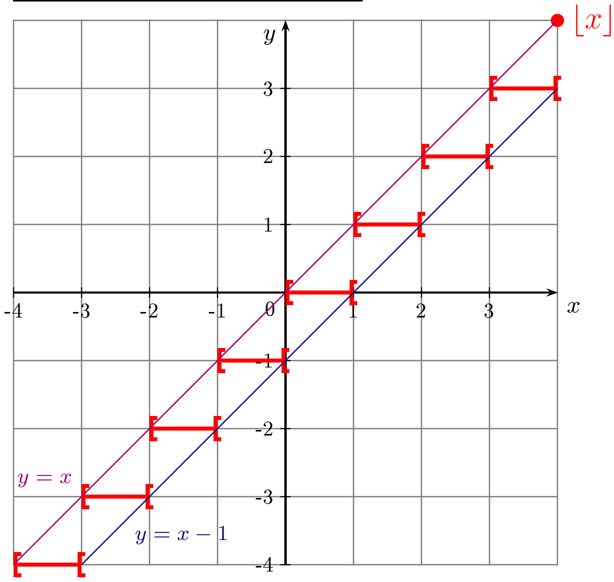
Propriétés : pour $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

a) $\lfloor n \rfloor = n$ $\qquad$ c) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$
b) $x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ $\qquad$ d) $n \leqslant x \Rightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor$

Remarques :

- la propriété b) ne dit rien d'autre que « la fonction partie entière est croissante », mais elle ne l'est pas strictement et même pas du tout (cf. représentation graphique) ;
- c'est LE exemple de fonction discontinue.

Représentation graphique :



3 Dérivation

Ensemble de définition de f	$f(x)$	Ensemble de dérivabilite de f	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \notin \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Fonctions dérivables : opérations et compositions

Pour x tel que	$f(x)$	$f'(x)$
	$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$
	$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
	$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$u(x)\neq 0$	$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$v(x)\neq 0$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$u(x)>0$	$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)>0$	$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
	$\exp(u(x))$	$u'(x)\exp(u(x))$
	$(u(x))^n$ avec $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$
$u(x)\neq 0$	$(u(x))^{-p}$ avec $p\in\mathbb{N}^*$	$-pu'(x)(u(x))^{-p-1}$
$u(x)>0$	$(u(x))^{\alpha}$ avec $\alpha\notin\mathbb{Z}$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$

Exemples : déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes

a) $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (du fait de la racine carrée) et $\forall x\in]0,+\infty[, f'(x)=3\sqrt{x}+(3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

b) $g(x)=\ln(x^2-3x+2)$ est définie et dérivable sur $\mathscr{D}_g=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ (domaine sur lequel $x^2-3x+2>0$) et $\forall x\in\mathscr{D}_g, g'(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ $\left(=\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right.$ avec $u(x)=x^2-3x+2)$

c) $h(x)=2x^7-3x^4+5-\dfrac{1}{x^3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, h'(x)=2\times 7x^6-3\times 4x^3-(-3)x^{-4}=14x^6-12x^3+\dfrac{3}{x^4}$ (en écrivant $\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$)

d) $k(x)=e^{\sqrt{x+1}}$ k peut s'écrire $k(x)=e^{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x+1}$ donc k est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x\in]-1,+\infty[, k'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$

e) $l(x)=\dfrac{e^x}{\ln(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathscr{D}_l=]0;1[\cup]1;+\infty[$ et $\forall x\in\mathscr{D}_l, l'(x)=\dfrac{e^x\ln(x)-e^x\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\dfrac{e^x(x\ln(x)-1)}{x(\ln(x))^2}$

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit $a\in I$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point A d'abscisse a, il s'agit de la droite d'équation

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Exemple : la tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point A de coordonnées $(0,1)$ est la droite d'équation :
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
or $f(0)=1$ et $f'(0)=1$ (car $f'=f$)
donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x+1$