Calcul algébrique

Exercice 1

Simplifier l'expression $f(x)$ suivante (on suppose qu'elle est bien définie).

1. $f(x) = \dfrac{2x+6}{2(x+7)} = \dfrac{2(x+3)}{2(x+7)} = \dfrac{2(x+3)}{2(x+7)} = \dfrac{x+3}{x+7}$
2. $f(x) = \dfrac{4x^2-8x+4}{(x-1)(4x+12)} = \dfrac{4(x^2-2x+1)}{(x-1)(4x+12)} = \dfrac{4(x-1)^2}{(x-1)4(x+3)} = \dfrac{x-1}{x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+5}{(x+1)(x+5)} - \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \dfrac{x+5-2x-2}{(x+1)(x+5)} = \dfrac{-x+3}{(x+1)(x+5)}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x-3}{(2x-1)(x-3)} - \dfrac{2x-1}{(2x-1)(x-3)} = \dfrac{x-3-(2x-1)}{(2x-1)(x-3)} = \dfrac{-x-2}{(2x-1)(x-3)}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1-3x+3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{4-3x}{(x+1)(x-1)}$
6. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-2x-3} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-3)} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-3)} - \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-3)}$
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1+\frac{1}{x+1}} = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x+1)\frac{1}{x+1}} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1+1} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

Exercice 2

Soit a et b deux réels non nuls, avec $a \neq b$. Simplifier :

1. $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{b^2}{ab} + \dfrac{a^2}{ab} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$
2. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \dfrac{a+b}{ab} \times \dfrac{ab}{b-a} = \dfrac{a+b}{b-a}$
3. (pour $a \neq -1$) $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{a+1}{a}} = 1 + \dfrac{a}{a+1}$
$= \dfrac{a+1+a}{a+1} = \dfrac{2a+1}{a+1}$

Exercice 3

Simplifier les fractions suivantes

1. $A = \dfrac{1-(-2)^2}{1-(-2)^3} = \dfrac{1-4}{1-(-8)} = \dfrac{-3}{9} = -\dfrac{1}{3}$
2. $B = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{7}{8} \times 2 = \dfrac{7}{4}$
3. $C = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{1-\frac{1}{16}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)} = \dfrac{\frac{15}{16}}{\frac{9}{8}} = \dfrac{15}{16} \times \dfrac{8}{9}$
$C = \dfrac{3 \times 5 \times 8}{2 \times 8 \times 3 \times 3} = \dfrac{5}{6}$

Exercice 4

1. Soit x un réel tel que $x > 1$. Simplifier l'expression $f(x)$, où $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{1}{2+\frac{1}{x-1}}$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\left(2+\frac{1}{x-1}\right)} = \frac{1}{2(x-1)+\frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{2x-2+1} = \frac{1}{2x-1}$$

Exercice 5

Soit n un entier naturel. Dans chaque expression suivante, faire apparaitre une seule puissance d'exposant n.

1. $a_n = 4(-3)^n + (-3)^{n+2}$
$= 4 \times (-3)^n + (-3)^2 \times (-3)^n$
$= (4+9) \times (-3)^n = 13(-3)^n$

2. $b_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2 - 2^n = 2^n \times (2-1) = 2^n$

3. $c_n = \dfrac{(-3)^{n+2}}{5^{2n+1}} = \dfrac{(-3)^2 \times (-3)^n}{5 \times 5^{2n}} = \dfrac{(-3)^2 \times (-3)^n}{5 \times (5^2)^n}$
$= \dfrac{9}{5} \times \left(\dfrac{-3}{5^2}\right)^n = \dfrac{9}{5}\left(-\dfrac{3}{25}\right)^n$

Inégalités

Exercice 8

Déterminer l'ensemble E suivant :

$$E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x - 6 \leqslant 0\}$$

Il s'agit simplement de résoudre une inéquation avec un trinôme du second degré
or $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ donc il admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = 2$
donc $x^2 + x - 6 \leqslant 0$ entre les racines (car $a = 1 > 0$), i.e. sur $[-3, 2]$, donc $E = [-3, 2]$

Exercice 11

7. Montrer que pour tout réel t, on a : $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$

En tâtonnant un peu on observe que $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2 \Rightarrow \sqrt{1+t^4}^2 \leqslant (1+t^2)^2$ par croissance de la fonction carré, ce qui revient à $1 + t^4 \leqslant 1 + 2t^2 + t^4$, qui est toujours vérifiée car $t^2 \geqslant 0$ et on va donc utiliser cette dernière inégalité comme point de départ :

soit $t \in \mathbb{R}$ alors $0 \leqslant 2t^2$ donc $1 + t^4 \leqslant 1 + 2t^2 + t^4$, i.e. $1 + t^4 \leqslant (1+t^2)^2$ (identité remarquable)
nous avons affaire à des nombres positifs, on peut donc appliquer la racine carrée qui est une fonction croissante, donc $\sqrt{1+t^4}^2 \leqslant \sqrt{(1+t^2)^2}$ et donc $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$
car $\sqrt{(1+t^2)^2} = |1+t^2| = 1 + t^2$ (car $1 + t^2 \geqslant 0$)

8. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$

On remarque la similitude entre les deux termes de l'inégalité et on comprend que l'on doit comparer $\ln(1+t^2)$ et $\ln(2)$

soit $t \in [0; 1]$ alors $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$ par croissance de la fonction carré
donc $1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$ et donc $\ln(1) \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$ par croissance de la fonction ln
donc $0 \geqslant -\ln(1+t^2) \geqslant -\ln(2)$ et donc $1 \geqslant 1 - \ln(1+t^2) \geqslant 1 - \ln(2)$
de plus $1 - \ln(2) \geqslant 0$ (car $2 \leqslant e$ et de fait $\ln(2) \leqslant \ln(e) = 1$ par croissance de ln)
cette inégalité ne comporte donc que des nombres positifs et lui on applique la fonction inverse qui est décroissante sur $]0, +\infty[$, ce qui permet d'obtenir $1 \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(2)}$ et donc en multipliant tous les termes par $\ln(1+t^2)$ qui est positif on obtient :
$\ln(1+t^2) \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$ et de fait $0 \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$ car $\ln(1+t^2) \geqslant 0$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Remarques préalables : dans ce type d'inégalité, il est dangereux de multiplier par le(s) dénominateur(s) pour simplifier la forme car les termes peuvent changer de signe. On va donc éviter.
Par ailleurs, on peut donner le domaine de définition de l'inégalité avant de l'étudier. Ici on propose de travailler sur des inégalités équivalentes et on aborde les valeurs interdites dans le tableau de signes final.

1. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-(x-2)}{(x-2)2x} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{(x-2)2x} \leqslant 0$
on dresse alors le tableau de signes suivant, sachant que $x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2, x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$ et $2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$2x$		-		-	0	+		+	
$\dfrac{x+2}{(x-2)2x}$		-		+	‖	-	‖	+	

on peut alors conclure $\mathscr{S} =]-\infty, -2] \cup]0; 2[$

2. $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x} - \dfrac{2x+1}{1+x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{3x-2-(2x+1)}{1+x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{x-3}{1+x}$
de même, on établit le tableau de signes, sachant que $x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ et $1+x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		-		-	0	+	
$x+1$		-	0	+		+	
$\dfrac{x-3}{1+x}$		+	‖	-	0	+	

on peut alors conclure $\mathscr{S} =]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$

3. $x - \dfrac{2}{x} > 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $x - \dfrac{2}{x} > 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{2}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2-x}{x} > 0$
or $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ (on peut trouver -1 et 2 comme racines évidentes), ce trinôme est donc positif à l'extérieur des racines ($a = 1 > 0$) et on peut établir le tableau de signes

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-		-	0	+	
$2x$		-		-	0	+		+	
$\dfrac{x^2-x-2}{x}$		-	0	+	‖	-	0	+	

on peut alors conclure $\mathscr{S} =]-1, 0[\cup]2, +\infty[$