1 Ensembles de nombres

Définitions, notations et propriétés	**Exemples**
Notations : • $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ • $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ • $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels** : les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul. • $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.	• -1 est un entier relatif mais pas un entier naturel. • $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel, mais il n'est pas un entier. • $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Remarques : l'écriture n'est pas unique. En effet, le nombre $\frac{2}{30}$ est un nombre rationnel, égal à $\frac{1}{15}$ (qui est aussi un nombre rationnel). $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*(\dots)$ désignent les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ privés de 0
Lorsque un élément x fait partie d'un ensemble E, on note $x \in E$ et on dit que x appartient à E (ou que x est élément de E). Si ce n'est pas le cas, on note $x \notin E$.	$-1 \in \mathbb{Z}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

2 Calculs algébriques

2.1 Fractions

Définitions :

- lorsque b est un réel non nul, **l'inverse** de b est le réel x tel que $x \times b = 1$, on le note $\frac{1}{b}$
- lorsque a est un réel, et b un réel non nul, le réel $\frac{a}{b}$ est le produit $a \times \frac{1}{b}$

Propriétés :	
1. soient a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$, alors $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	**1.** pour x un réel, $\frac{-x+1}{x^2+2} = -\frac{x-1}{x^2+2}$
2. soient a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$ et soit c un réel tel que $\boxed{c \neq 0}$, alors : $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$	**2.** pour $x \neq 0$, $\frac{x+e^x}{x} = \frac{x\left(1+\frac{e^x}{x}\right)}{x \times 1} = 1 + \frac{e^x}{x}$
3. soient a, b et c trois réels avec $b \neq 0$, alors : $\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$	**3.** pour $x > 0$, $\frac{x^3 + x^2\ln(x) + 1}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{x^2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} = x^2 + x\ln(x) + \frac{1}{x}$
4. soient a, b et c trois réels avec $b \neq 0$, alors : $\frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b} = c \times \frac{a}{b}$	**4.** pour $x > 0$, $\frac{(x+1)^2}{x+3} \times \frac{x+3}{\ln(x)} = \frac{(x+1)^2(x+3)}{(x+3)\ln(x)} = \frac{(x+1)^2}{\ln(x)}$
5. soit a, b, c, d des réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{b}$	**5.** soit x un réel non nul, $\frac{\frac{1}{3}\left(x+\frac{6}{x}\right)}{x} = \frac{1}{3}\left(x+\frac{6}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{6}{x^2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2}$

⚠ **Attention**, il n'y a pas de transformation pour $\dfrac{a}{b+c}$

2.2 Puissances entières

Définitions : • par définition, $a^0 = 1$, quel que soit $a \in \mathbb{R}$ • pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, $$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$ Remarque : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x^1 = x$	▷ $(-3)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, et $0^0 = 1$ ▷ $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ ▷ $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$ ▷ $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ ▷ $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$ ▷ attention aux parenthèses : $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ alors que $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$
Définitions : soit a un réel tel que $\boxed{a \neq 0}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit a^{-n} comme $\dfrac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ Remarque : quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$
Propriétés : soient $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors quand les expressions sont bien définies : 1) $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ (pour $a \in \mathbb{R}^*$) 2) $a^n \times a^m = a^{n+m}$ 3) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 4) $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$ 5) $a^n b^n = (ab)^n$ 6) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	Soient x et y des réels. ▷ $x^2 \times x^4 = (x \times x) \times (x \times x \times x \times x) = x^6$ ▷ si $x \neq 0$ alors $x^2 \times x^{-5} = x^{-3}$ ▷ $(x^2)^4 = x^2 \times x^2 \times x^2 \times x^2 = x^8$ ▷ si $x \neq 0$ alors $(x^2)^{-5} = x^{-10} = \dfrac{1}{x^{10}}$ ▷ $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 = \dfrac{(-2)^3}{3^3} = -\dfrac{8}{27}$ ▷ $x^2y^4 = x^2(y^2)^2 = (xy^2)^2$

2.3 Racine carrée

Définition : soit a un réel tel que $\boxed{a \geqslant 0}$ La **racine carrée** de a est l'unique réel **positif** x tel que $x^2 = a$, elle est notée $\sqrt{a}$ Remarques : ▷ $\sqrt{a}$ n'existe que si $a \in \mathbb{R}_+$ ▷ Pour tout $a \geqslant 0$, par définition $\sqrt{a} \geqslant 0$	**1.** $\sqrt{0} = 0$ **2.** Le seul réel x tel que $x^2 = 1$ et $x \geqslant 0$ vaut 1, donc $\sqrt{1} = 1$. Il y a un autre réel x tel que $x^2 = 1$, il s'agit de -1, mais -1 n'est pas positif. **3.** $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et $2 \geqslant 0$
Propriétés : pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on a : 1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 2) si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 3) si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{sinon} \end{cases}$	1) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ de même $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ 3) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ **Attention** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3 Factorisations et développements

3.1 Identités remarquables

Forme développée	Forme factorisée	Exemples
$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2$	$x^2+10x+25=(x+5)^2$ $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^2$	$x^2-2x+1=(x-1)^2$ $2x^2-6\sqrt{2}x+9=(x\sqrt{2}-3)^2$
a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$	$x^2-49=(x-7)(x+7)$ $x^6-81=(x^3-9)(x^3+9)$

3.2 Fonctions polynomiales du second degré

Soit a,b,c trois réels avec $a\neq 0$
on s'intéresse à l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ et on pose $\Delta=b^2-4ac$ (le discriminant).

Cas	Résultats	Exemples
$\Delta>0$	l'équation (E) admet deux solutions (racines) : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\quad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ de plus, pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	avec $f(x)=2x^2-x-3$ alors $\Delta=25$ donc l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : $x_1=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=-1$. et de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$
$\Delta=0$	l'équation (E) admet une unique solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}$ de plus, pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	avec $f(x)=3x^2+2x+\dfrac{1}{3}$ alors $\Delta=0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution : $x_0=-\dfrac{1}{3}$ et de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$
$\Delta<0$	l'équation (E) n'admet aucune solution et il n'y a pas de factorisation pour ax^2+bx+c quelle que soit la valeur du réel x, ax^2+bx+c garde le même signe, celui de a.	avec $f(x)=-x^2+4x-5$ alors $\Delta=-4$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution. de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)<0$

4 Inégalités

Dans cette section, a,b,c,d et x désignent des nombres réels.

Propriétés de base :

- on a toujours $a\leqslant a$
- **transitivité**, si $a\leqslant b$ et $b\leqslant c$ alors $a\leqslant c$
- si $\begin{cases} a\leqslant b \\ b\leqslant a \end{cases}$ alors $a=b$

Définition de l'inégalité stricte : $a<b$ signifie : $a\leqslant b$ et $a\neq b$

Remarque : ainsi, si on a $a<b$, on peut dire que $a\leqslant b$. Par contre, si on a $a\leqslant b$, on ne peut pas dire que $a<b$. Par exemple, on a bien $3\leqslant 3$, mais il est faux de dire que $3<3$.

4.1 Inégalités et opérations

4.1.1 Somme et produit

Propriétés	**Exemples**
si $a \leqslant b$ alors $a+x \leqslant b+x$ si $a \leqslant b$ alors $a-x \leqslant b-x$	
si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ alors $a+c \leqslant b+d$	si $1<a<2$, et $-5<b<-3$ alors $1-5<a+b<2-3$, c'est-à-dire $-4<a+b<-1$ par ailleurs, on a $1<a<2$ et $3<-b<5$ donc $1+3<a-b<2+5$, c'est-à-dire $4<a-b<7$
si $\begin{cases} a \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ alors $ax \leqslant bx$	
si $\begin{cases} a \leqslant b \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ alors $ax \geqslant bx$	
si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases}$ alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$	on a $1<a<2$ et $3<-b<5$ tous les nombres sont positifs donc $1\times 3<a(-b)<2\times 5$ c'est-à-dire $3<-ab<10$ d'où $-10<ab<-3$

Remarque : des propriétés analogues existent avec des inégalités strictes.

4.2 Inverse

si $0<a \leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$	si $1<a<2$, et $-5<b<-3$ alors $\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{2}$ de plus $3<-b<5$ donc $\dfrac{3}{2}<\dfrac{-b}{a}<5$ donc $-5<\dfrac{b}{a}<-\dfrac{3}{2}$
si $a \leqslant b<0$ alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$	$-5<b<-3$ donc $-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{b}<-\dfrac{1}{5}$ et $1<a<2$ (tous positifs) donc en multipliant, on obtient : $-\dfrac{2}{3}<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{5}$

Remarque : **attention**, si $a<0<b$, alors $\dfrac{1}{a}<0<\dfrac{1}{b}$

4.3 Carré et racine carrée

si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$	si $1<a<2$ alors $1<a^2<4$ et $0<a^2-1<3$
si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$	si $-5<b<-3$ alors $9<b^2<25$ et donc $\dfrac{1}{25}<\dfrac{1}{b^2}<\dfrac{1}{9}$
si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$	si $0<a^2-1<3$ alors $0<\sqrt{a^2-1}<\sqrt{3}$

En combinant les inégalités des exemples ci-dessus, on trouve alors :

$0<\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{b^2}<\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, c'est-à-dire $0<\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{b^2}<\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$