Quelques corrigés

## Domaine de définition

### Exercice 2

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

**1.** $f(x) = \dfrac{\ln(x^3+1)}{4-x^2}$

Il faut d'une part que le contenu du logarithme soit strictement positif et d'autre part que le dénominateur ne s'annule pas.
Tout d'abord, on peut remarquer que $-1$ annule $x^3+1$ ce qui entraine une factorisation par $x+1$ : $x^3+1 = (x+1)(ax^2+bx+c)$
en développant et en identifiant $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, on trouve $a = 1, b = -1$ et $c = 1$, donc $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$
or $x^2-x+1$ ne s'annule pas car son discrimant est strictement négatif (il vaut $-3$), ce trinôme est donc toujours strictement positif, donc $x^3+1 > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
par ailleurs, $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ donc $4-x^2 = 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$
donc on écarte en plus la valeur 2 (le logarithme n'est pas défini pour $x = -2$), donc $\mathscr{D}_f = ]-1, 2[\cup]2+\infty[$

### Exercice 3

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

**1.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2+5x+2}$

Deux contraintes : la racine carrée et le quotient.
au numérateur la racine est définie dès lors que son contenu est positif ou nul, ce qui est le cas pour tout $x$ ici car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+1 \geqslant 0$
par ailleurs, pour la bonne définition du quotient, il faut que le dénominateur ne s'annule pas
or $-1$ est une racine évidente de $3x^2+5x+2$ donc $3x^2+5x+2 = 3(x+1)(x-x_2)$ et donc $-3x_2 = 2$ soit $x_2 = -\dfrac{2}{3}$
donc $3x^2+5x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x_2 = -\dfrac{2}{3}$
finalement $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-1; -\dfrac{2}{3}\right\}$

**2.** $h(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2-1}$

De manière analogue à la question précédente, $h(x)$ est définie $\Leftrightarrow x(x+1) \geqslant 0$ et $x^2-1 \neq 0$
Pour le numérateur : on dresse le tableau de signes, sachant que $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | | - | 0 | + | |
| $x+1$ | | - | 0 | + | | + | |
| $x(x+1)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

donc $\sqrt{x(x+1)}$ est définie pour $x \in ]-\infty, -1] \cup [0; +\infty[$

Nota bene : on peut aussi voir $x(x+1)$ comme un polynôme du second degré dont les racines sont $-1$ et $0$, puis en déduire son signe.

Pour le dénominateur :
$x^2-1 = (x-1)(x+1)$ donc $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

finalement en regroupant les deux contraintes, on trouve
$\mathscr{D}_f = ]-\infty, -1[\cup[0; 1[\cup]1; +\infty[$

**Fonctions usuelles**

**Exercice 6**

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue $x$ réelle suivantes : **5.** $|\ln(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^{\ln(x)} < e^1$
la dernière équivalence est valide car les fonctions exponentielle et logarithme (pour le retour) sont strictement croissantes
or $e^{\ln(x)} = x$ donc $|\ln(x)| < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e^1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e} < x < e^1\right)$

**6.** $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) - \ln(3x) < 1$
on peut préciser que cette équation n'est définie que lorsque $x > 0$ (pour la bonne définition de $\ln(3x)$) et lorsque $x^2 - 4e^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4e^2 \Leftrightarrow |x| > 2e$ (pour la bonne définition de $\ln(x^2 - 4e^2)$)
finalement l'équation est définie lorsque $x > 2e$. Soit $x > 2e$, alors : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 4e^2}{3x}\right) < 1$
car $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$
donc $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \exp\left(\ln\left(\frac{x^2 - 4e^2}{3x}\right)\right) < e^1$
la dernière équivalence est valide car les fonctions exponentielle et logarithme (pour le retour) sont strictement croissantes
donc $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4e^2}{3x} < e$ car $e^{\ln(x)} = x$
donc $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < e \times 3x$ car $3x > 0$
donc $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 3ex - 4e^2 < 0$
nous sommes donc ramenés à l'étude d'un trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = (-3e)^2 - 4 \times 1 \times (-4e^2) = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2$
comme $a > 0$, ce trinôme est négatif à l'extérieur des racines qui sont $x_1 = \frac{3e - \sqrt{25e^2}}{2} = \frac{-2e}{2} = -e$ et $x_2 = \frac{3e + \sqrt{25e^2}}{2} = \frac{8e}{2} = 4e$
finalement $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -e[\cup]4e, +\infty[$

**7.** $e^{2x} + 8 \geqslant 6e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x - 4) \geqslant 0$
on a utilisé ici que 2 et 4 sont les racines de $x^2 - 6x + 8$
on conclut ensuite avec un tableau de signe sachant que :
$e^x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(2)$ (de même $e^x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln(2)$)

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $\ln(4)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x - 2$ | | - | 0 | + | | + | |
| $e^x - 4$ | | - | | - | 0 | + | |
| $(e^x-2)(e^x-4)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

finalement $e^{2x} + 8 \geqslant 6e^x \Leftrightarrow x \in ]-\infty, \ln(2)] \cup [\ln(4), +\infty[$

**8.** $\sqrt{x} + 1 = x$
On peut raisonner par analyse-synthèse (en isolant la racine puis en élevant au carré) ou par équivalence en remarquant que $\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1$ et donc si $x$ est solution alors forcément $x - 1 \geqslant 0$ (puisque cela vaut $\sqrt{x}$), i.e. $x \geqslant 1$. On va donc se limiter à $x \geqslant 1$
soit $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow x = (x-1)^2$
la dernière équivalence est valide car on peut faire le retour en arrière : en effet, $x \geqslant 0$ donc on peut prendre sa racine carrée et de plus $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1| = x - 1$ car $x \geqslant 1$ $(x - 1 \geqslant 0)$
donc $\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$
nous sommes ramenés à l'étude d'un trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$ donc $x^2 - 3x + 1$ admet deux racines qui valent $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
or $\sqrt{5} \geqslant \sqrt{4} \geqslant 2$ donc $-\sqrt{5} \leqslant -2$ donc $3 - \sqrt{5} \leqslant 1$ et donc $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$
donc $x_1$ ne peut pas être solution, par contre $x_2 \geqslant 1$
finalement $\mathscr{S} = \left\{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

**Dérivation**

**Exercice 8**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

**3.** $h(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Comme très souvent avec les puissances quelconques, il faut revenir à la définition et utiliser l'écriture exponentielle : $x^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\ln(x)) = \exp(u(x))$ avec $u(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$

alors $\forall x \in \mathscr{D}_h, h'(x) = u'(x)\exp(u(x))$ et on utilise la formule du produit pour dériver $u$ : $u'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))$

finalement $h'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))x^{\frac{1}{x}}$

**4.** $i(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$

$i$ est de la forme $i(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x - \frac{3}{x}$

alors $u'(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$

donc $\forall x \in \mathscr{D}_i, i'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{2x - \frac{3}{x}} = \frac{x^2\left(2 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2x - \frac{3}{x}\right)} = \frac{2x^2 + 3}{2x^3 - 3x}$

**5.** $j(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

On utilise la formule du quotient $(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2 - 1$, donc $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = 2x$

et de fait $\forall x \in \mathscr{D}_j, j'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 1) - e^{2x}2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x - 1)}{(x^2 - 1)^2}$

**Exercice 10**

**2.** Faire l'étude graphique de la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$

On peut remarquer dans un premier temps que la fonction $f$ est paire. D'une part son domaine de définition est symétrique par rapport à 0, d'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \ln\left((-x)^2\right) = \ln(x^2) = f(x)$

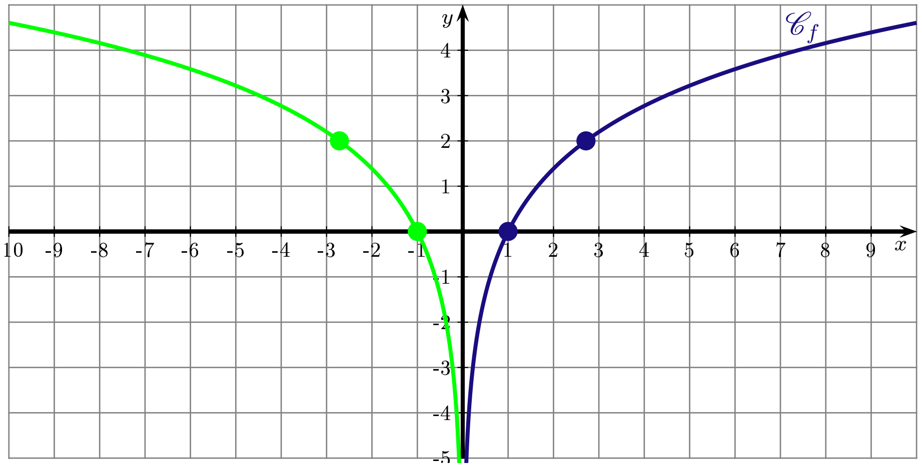
on va donc l'étudier sur $]0, +\infty[$ et on déduira le comportement sur $]-\infty, 0[$ par symétrie

$f$ est dérivable là où elle est définie, de plus $f$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2$ et donc $u'(x) = 2x$

donc $f' = \frac{u'}{u}$, donc $\forall x > 0, f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ donc $f'(x)$ est (strictement) positif sur $]0, +\infty[$ et $f$ est (strictement) croissante sur cet intervalle

*Nota bene* : pour $x > 0$, on peut écrire $f(x) = 2\ln(x)$ mais attention, cela n'est pas valable pour $x < 0$

pour la représentation graphique, la courbe sera donc analogue à cette de ln et on peut donc utiliser $\ln(1) = 0$ donc $f(1) = 0, \ln(e) = 1$, donc $f(e) = 2$ et le fait que ln tende vers $-\infty$ quand $x$ tend vers 0 puis on déduit la courbe sur $]-\infty, 0[$ par symétrie



## Exercice 11

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^{\ln(x)}$

**1.** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$

On revient à la définition pour y voir plus clair : $x^{\ln(x)}$ est défini par $x^{\ln(x)} = \exp(\ln(x)\ln(x)) = \exp(\ln(x)^2)$
donc $f(x)$ est défini dès lors que $\ln(x)$ est défini, i.e. sur $]0, +\infty[= \mathscr{D}_f$

**2.** Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Avec l'écriture $f(x) = \exp(\ln(x)^2)$, on peut dire que $f$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ puisqu'il s'agit d'une composition de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.
Et en écrivant $f(x) = \exp(u(x))$, on trouve $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = u'(x)\exp(u(x))$
et $u(x) = \ln(x)^2$ que l'on peut écrire $u(x) = v(x)^2$
alors $u'(x) = 2v'(x)v(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$
donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}\exp(\ln(x)^2) = \dfrac{2\ln(x)x^{\ln(x)}}{x}$
et donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = 2\ln(x)x^{\ln(x)-1}$

**3.** Etudier les variations de $f$

En utilisant la dernière écriture de $f'(x)$, comme (pour $x > 0$), $x^{\ln(x)-1}$ est strictement positif (c'est le résultat d'une exponentielle), alors $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$
De fait $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0, 1[$, nul en 1 et strictement positif sur $]1, +\infty[$, on peut donc dresser le tableau de variations (sachant que $f(1) = \exp(\ln(1)^2) = e^0 = 1$) :

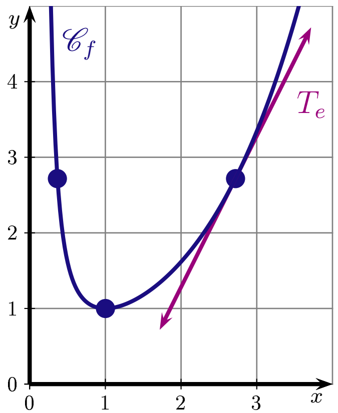
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ | ↘ | $1$ | ↗ | |

**4.** Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $e$

Par définition, cette tangente a pour équation $y = f'(e)(x - e) + f(e)$
or $f(e) = e^{\ln(e)} = e^1 = e$ et
$f'(e) = 2\ln(e)e^{\ln(e)-1} = 2 \times 1 \times e^0 = 2$
donc l'équation de la tangente est
$y = 2(x - e) + e = 2x - e$

**5.** Tracer $\mathscr{C}_f$

On utilise les informations précédentes (tableau de variations et la tangente). Il nous manque les limites ($+\infty$ en 0 et $+\infty$), on peut remarquer que
$f(e^{-1}) = (e^{-1})^{(}\ln(e^{-1}) = (e^{-1})^{-1} = e$



**Exercice 13**

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_m$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x) = x^m \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_m$ la représentation graphique de $f_m$ dans un repère orthonormé.

**1.** Soit $m \in \mathbb{R}$. Justifier que $f_m$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dériver $f_m$

Soit $m \in \mathbb{R}$, alors $f_m$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto x^m$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit donc d'un produit de fonctions dérivables. On va donc utiliser la formule du produit avec $u(x) = x^m$ donc $u'(x) = mx^{m-1}$ (d'après le cours) et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_m(x) = mx^{m-1}\ln(x) + x^m \times \dfrac{1}{x}$
donc $f'_m(x) = mx^{m-1}\ln(x) + x^{m-1} = x^{m-1}(m\ln(x) + 1)$

**2.** Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ admettent la même tangente au point d'abscisse 1

Soit $m \in \mathbb{R}$, par définition la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'_m(1)(x-1) + f_m(1)$
or $f_m(1) = 1^m \ln(1) = 1 \times 0 = 0$
et $f'_m(1) = 1^{m-1}(m\ln(1) + 1) = 1 \times (0+1) = 1$
donc la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = 1(x-1) + 0$ i.e. $y = x - 1$
la tangente est donc toujours la même, indépendamment de la valeur de $m$